

قیمت	روپیہ	آنہ
سکۂ عثمانیہ	چار	آٹھ
سکۂ انگریزی	تین	بارہ

سلسلۂ نصابِ تعلیم جامعۂ عثمانیہ

علم حرکت

لونی صاحب کی کتاب ایلیمنٹس آف ڈائینمکس کا اردو ترجمہ

از

خان فضل محمد خان صاحب ایم۔ اے۔ (پنجاب) بی۔ اے۔ (کیمبرج)
رینگلر سنہ ۱۹۰۵ء۔ سکالر گورنمنٹ آف انڈیا سنہ ۱۹۰۵ء سکالر سینٹ جانز کالج کیمبرج سنہ ۱۹۰۳-۱۹۰۶ء
فیلو پنجاب یونیورسٹی سنہ ۱۹۱۰-۱۱ء
رفیق جامعۂ عثمانیہ
نائب ناظم تعلیمات سرکار عالی

سنہ ۱۳۳۸ھ م سنہ ۱۳۲۹ف م سنہ ۱۹۲۰ء

مطبوعۂ دارالطبع سرکار عالی حیدرآباد دکن

مُقدّمہ

دنیا میں ہر قوم کی زندگی میں ایک ایسا زمانہ آتا ہے جب کہ اُس کے قوائے ذہنی میں انحطاط کے آثار نمودار ہونے لگتے ہیں، ایجاد و اختراع اور غور و فکر کا مادّہ تقریباً مفقود ہو جاتا ہے، تخیل کی پرواز اور نظر کی جولانی تنگ اور محدود ہو جاتی ہے، علم کا دار و مدار چند رسمی باتوں اور تقلید پر رہ جاتا ہے۔ اُس وقت قوم یا تو بیکار اور مردہ ہو جاتی ہے یا سنبھلنے کے لئے یہ لازم ہوتا ہے کہ وہ دوسری ترقی یافتہ اقوام کا اثر قبول کرے۔ تاریخ عالم کے ہر دَور میں اس کی شہادتیں موجود ہیں۔ خود ہمارے دیکھتے دیکھتے جاپان پر یہی گذری اور یہی حالت اب ہندوستان کی ہے۔

جس طرح کوئی شخص دوسرے بنی نوع انسان سے قطع تعلق کرکے تنہا اور الگ تھلگ نہیں رہ سکتا اور اگر رہے تو پنپ

نہیں سکتا اسی طرح یہ بھی ممکن نہیں کہ کوئی قوم دیگر اقوام عالم سے بے نیاز ہو کر پھولے پھلے اور ترقی پائے۔ جس طرح ہوا کے جھونکے اور ادنیٰ پرندوں اور کیڑے کموڑوں کے اثر سے وہ مقامات تک بھرے بھرے رہتے ہیں جہاں انسان کی دسترس نہیں اسی طرح انسانوں اور قوموں کے اثر بھی ایک دوسرے تک اڑ کر پہنچتے ہیں۔ جس طرح یونان کا اثر روم اور دیگر اقوام یورپ پر پڑا جس طرح عرب نے عجم کو اور عجم نے عرب کو اپنا فیض پہنچایا، جس طرح اسلام نے یورپ میں تاریکی اور جہالت کو مٹا کر علم کی روشنی پہنچائی اسی طرح آج ہم بھی بہت سی باتوں میں مغرب کے محتاج ہیں۔ یہ قانون عالم ہے جو یوں ہی جاری رہا اور جاری رہیگا۔

"دئے سے دیا یوں ہی جلتا رہا ہے"

جب کسی قوم کی نوبت یہاں تک پہنچ جاتی ہے اور وہ آگے قدم بڑھانے کی سعی کرتی ہے تو ادبیات کے میدان میں پہلی منزل ترجمہ ہوتی ہے۔ اس لئے کہ جب قوم میں جدت اور اپج نہیں رہی تو ظاہر ہے کہ اس کی تصانیف معمولی، ادھوری، کم مایہ اور ادنیٰ ہونگی۔ اُس وقت قوم کی بڑی خدمت یہی ہے کہ ترجمہ کے ذریعہ سے دنیا کی اعلیٰ درجہ کی تصانیف اپنی زبان میں لائی جائیں۔ یہی ترجمے خیالات میں تغیر اور معلومات میں اضافہ کریں گے، جمود کو توڑیں گے اور قوم میں ایک نئی حرکت پیدا کریں گے اور پھر آخر یہی ترجمے تصنیف وتالیف

کے جدید اسلوب اور ڈھنگ سُجھائیں گے۔ ایسے وقت میں ترجمہ تصنیف سے زیادہ قابل قدر، زیادہ مفید اور زیادہ فیض رساں ہوتا ہے۔

اسی اصول کی بنا پر جب عثمانیہ یونیورسٹی کی تجویز پیش ہوئی تو ہز اکزالٹڈ ہائینس رستمِ دوراں ارسطوئے زماں سپہ سالار آصف جاہ مظفر الممالک نظام الملک نظام الدولہ نوّاب میر عثمان علیخان بہادر فتح جنگ جی۔سی۔اس۔آئی۔جی۔سی۔بی۔ای۔والی حیدرآباد دکن خلّد اللہ ملکہٗ و سلطنتہٗ نے جن کی علمی قدر دانی اور علمی سرپرستی اس زمانہ میں احیائے علوم کے حق میں آب حیات کا کام کر رہی ہے، بہ تقاضائے مصلحت و دوربینی سب سے اول سررشتۂ تالیف و ترجمہ کے قیام کی منظوری عطا فرمائی، جو نہ صرف یونیورسٹی کے لئے نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کریگا بلکہ ملک میں نشر و اشاعتِ علوم و فنون کا کام بھی انجام دیگا۔ اگرچہ اس سے قبل بھی یہ کام ہندوستان کے مختلف مقامات میں تھوڑا تھوڑا انجام پایا مثلاً فورٹ ولیم کالج کلکتہ میں زیر نگرانی ڈاکٹر گلکرسٹ، دہلی سوسائٹی میں، انجمن پنجاب میں زیر نگرانی ڈاکٹر لائٹنر و کرنل ہالرائڈ، علی گڑھ سائنٹفک انسٹیوٹ میں جس کی بنا سر سیّد احمد خاں مرحوم نے ڈالی۔ مگر یہ کوششیں سب وقتی اور عارضی تھیں۔ نہ اُنکے پاس کافی سرمایہ اور سامان تھا نہ اُنھیں یہ موقع حاصل تھا

اور نہ انہیں اعلیٰحضرت و اقدس جیسے علم پرور فرمانروا کی سرپرستی کا شرف حاصل تھا۔ یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو علوم و فنون سے مالا مال کرنے کے لئے باقاعدہ اور مستقل کوشش کی گئی ہے۔ اور یہ پہلا وقت ہے کہ اردو زبان کو یہ رتبہ ملا ہے کہ وہ اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار پائی ہے۔ احیائے علوم کے لئے جو کام آگسٹس نے رومہ میں، خلافت عباسیہ میں ہارون الرشید و مامون الرشید نے ہسپانیہ میں عبدالرحمٰن ثالث نے، بکرماجیت و اکبر نے ہندوستان میں، الفرڈ نے انگلستان میں، پیٹر اعظم و کیتھرائن نے روس میں اور مُت شی ہٹو نے جاپان میں کیا، وہی فرمانروائے دولت آصفیہ نے اس ملک کے لئے کیا۔ اعلیٰحضرت واقدس کا یہ کارنامہ ہندوستان کی علمی تاریخ میں ہمیشہ فخر و مباہات کے ساتھ ذکر کیا جائیگا۔

منجملہ اُن اسباب کے جو قومی ترقی کا موجب ہوتے ہیں ایک بڑا سبب زبان کی تکمیل ہے۔ جس قدر جو قوم زیادہ ترقی یافتہ ہے اُسی قدر اُس کی زبان وسیع اور اس میں نازک خیالات اور علمی مطالب کے ادا کرنے کی زیادہ صلاحیت ہوتی ہے، اور جس قدر جس قوم کی زبان محدود ہوتی ہے اُسی قدر تہذیب و شایستگی بلکہ انسانیت میں اس کا درجہ کم ہوتا ہے۔ چنانچہ وحشی اقوام میں الفاظ کا ذخیرہ بہت ہی کم پایا گیا ہے۔ علمائے فلسفہ و علم اللسان نے یہ ثابت کیا ہے کہ زبان، خیال اور

خیال، زبان ہے اور ایک مدت کے بعد اس نتیجے پر پہنچے ہیں کہ انسانی دماغ کے صحیح تاریخی ارتقا کا علم، زبان کی تاریخ کے مطالعہ سے حاصل ہو سکتا ہے۔ الفاظ ہمیں سوچنے میں ویسی ہی مدد دیتے ہیں جیسی آنکھیں دیکھنے میں۔ اس لئے زبان کی ترقی درحقیقت عقل کی ترقی ہے۔

علمِ ادب اسی قدر وسیع ہے جس قدر حیاتِ انسانی۔ اور اس کا اثر زندگی کے ہر شعبہ پر پڑتا ہے۔ وہ نہ صرف انسان کی ذہنی، معاشرتی، سیاسی ترقی میں مدد دیتا، اور نظر میں وسعت، دماغ میں روشنی، دلوں میں حرکت اور خیالات میں تغیر پیدا کرتا ہے بلکہ قوموں کے بنانے میں ایک قوی آلہ ہے۔ قومیت کے لئے ہم خیالی شرط ہے اور ہم خیالی کے لئے ہم زبانی لازم۔ گویا یک زبانی قومیت کا شیرازہ ہے جو اسے منتشر ہونے سے بچائے رکھتا ہے۔ ایک زمانہ تھا جب کہ مسلمان اقطاع عالم میں پھیلے ہوئے تھے لیکن اُن کے علمِ ادب اور زبان نے انہیں ہر جگہ ایک کر رکھا تھا۔ اس زمانے میں انگریز ایک دنیا پر چھائے ہوئے ہیں لیکن باوجود بُعدِ مسافت و اختلافِ حالات یک زبانی کی بدولت قومیت کے ایک سلسلے میں منسلک ہیں، زبان میں جادو کا سا اثر ہے اور صرف افراد ہی پر نہیں بلکہ اقوام پر بھی اُس کا وہی تسلط ہے۔

یہی وجہ ہے کہ تعلیم کا صحیح اور فطرتی ذریعہ اپنی ہی زبان ہو سکتی ہے۔ اس امر کو اعلیٰحضرت واقدس نے

پہچانا اور جامعۂ عثمانیہ کی بنیاد ڈالی۔ جامعۂ عثمانیہ ہندوستان میں پہلی یونیورسٹی ہے جس میں ابتدا سے انتہا تک ذریعۂ تعلیم ایک دیسی زبان ہوگا۔ اور یہ زبان اردو ہوگی۔ ایک ایسے ملک میں جہاں "بھانت بھانت کی بولیاں" بولی جاتی ہیں، جہاں ہر صوبہ ایک نیا عالم ہے، صرف اردو ہی ایک عام اور مشترک زبان ہو سکتی ہے۔ یہ اہل ہند کے میل جول سے پیدا ہوئی اور اب بھی یہی اس فرض کو انجام دیگی۔ یہ اس کے خمیر اور وضع و ترکیب میں ہے۔ اس لئے یہی تعلیم اور تبادلہ خیالات کا واسطہ بن سکتی اور **قومی زبان** کا دعوے کر سکتی ہے۔

جب تعلیم کا ذریعہ اردو قرار دیا گیا تو یہ کھلا اعتراض تھا کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کتابوں کا ذخیرہ کہاں ہے اور ساتھ ہی یہ بھی کہا جاتا تھا کہ اردو میں یہ صلاحیت ہی نہیں کہ اس میں علوم و فنون کی اعلیٰ تعلیم ہو سکے۔ یہ صحیح ہے کہ اردو میں اعلیٰ تعلیم کے لئے کافی ذخیرہ نہیں۔ اور اردو ہی پر کیا منحصر ہے، ہندوستان کی کسی زبان میں بھی نہیں۔ یہ طلب و رسد کا عام مسئلہ ہے۔ جب مانگ ہی نہ تھی تو رسد کہاں سے آتی۔ جب ضرورت ہی نہ تھی تو کتابیں کیونکر مہیا ہوتیں۔ ہماری اعلیٰ تعلیم غیر زبان میں ہوتی تھی، تو علوم و فنون کا ذخیرہ ہماری زبان میں کہاں سے آتا۔ ضرورت ایجاد کی ماں ہے۔ اب ضرورت محسوس ہوئی ہے تو کتابیں بھی

مہیا ہو جائیں گی۔ اسی کمی کو پورا کرنے اور اسی ضرورت کو رفع کرنے کے لئے سررشتۂ تالیف و ترجمہ قائم کیا گیا۔ یہ صحیح نہیں ہے کہ اردو زبان میں اس کی صلاحیت نہیں۔ اس کے لئے کسی دلیل و برہان کی ضرورت نہیں۔ سررشتۂ تالیف و ترجمہ کا وجود اس کا شافی جواب ہے۔ یہ سررشتہ یہی کام کر رہا ہے۔ کتابیں تالیف و ترجمہ ہو رہی ہیں اور چند روز میں عثمانیہ یونیورسٹی کالج کے طالب علموں کے ہاتھوں میں ہونگی اور رفتہ رفتہ عام شایقینِ علم تک پہنچ جائیں گی۔

لیکن اس میں سب سے کٹھن اور سنگلاخ مرحلہ وضع اصطلاحات کا تھا۔ اس میں بہت کچھ اختلاف اور بحث کی گنجائش ہے۔ اس بارے میں ایک مدت کے تجربہ اور کامل غور و فکر اور مشورہ کے بعد میری یہ رائے قرار پائی ہے کہ تنہا نہ تو ماہرِ علم صحیح طور سے اصطلاحات وضع کر سکتا ہے اور نہ ماہرِ لسان۔ ایک کو دوسرے کی ضرورت ہے۔ اور ایک کی کمی دوسرا پورا کرتا ہے۔ اس لئے اس اہم کام کو صحیح طور سے انجام دینے کے لئے یہ ضروری ہے کہ دونوں یک جا جمع کئے جائیں تاکہ وہ ایک دوسرے کے مشورہ اور مدد سے ایسی اصطلاحیں بنائیں جو نہ اہل علم کو ناگوار ہوں نہ اہل زبان کو۔ چنانچہ اسی اصول پر ہم نے وضع اصطلاحات کے لئے ایک ایسی مجلس بنائی جس میں دونوں جماعتوں کے اصحاب شریک ہیں۔ علاوہ اِن کے

ہم نے اُن اہلِ علم سے بھی مشورہ کیا جو اس کی خاص اہلیت رکھتے ہیں اور بُعدِ مسافت کی وجہ سے ہماری مجلس میں شریک نہیں ہو سکتے ۔ اس میں شک نہیں کہ بعض الفاظ غیر مانوس معلوم ہوں گے اور اہل زبان انہیں دیکھ کر ناک بھوں چڑھائیں گے ۔ لیکن اس سے گزیر نہیں ۔ ہمیں بعض ایسے علوم سے واسطہ ہے جن کی ہوا تک ہماری زبان کو نہیں لگی ۔ ایسی صورت میں سوائے اس کے چارہ نہیں کہ جب ہماری زبان کے موجودہ الفاظ خاص خاص مفہوم کے ادا کرنے سے قاصر ہوں تو ہم جدید الفاظ وضع کریں ۔ لیکن اس کے یہ معنی نہیں ہیں کہ ہم نے محض ٹالنے کے لئے زبردستی الفاظ گھڑ کر رکھ دئے ہیں، بلکہ جس نہج پر اب تک الفاظ بنتے چلے آئے ہیں اور جن اصولِ ترکیب و اشتقاق پر اب تک ہماری زبان کاربند رہی ہے، اس کی پوری پابندی ہم نے کی ہے ۔ ہم نے اُس وقت تک کسی لفظ کے بنانے کی جرأت نہیں کی جب تک اُسی قسم کی متعدد مثالیں ہمارے پیش نظر نہ رہی ہوں ۔ ہماری رائے میں جدید الفاظ کے وضع کرنے کی اس سے بہتر اور صحیح کوئی صورت نہیں ۔ اب اگر کوئی لفظ غیر مانوس یا اجنبی معلوم ہو تو اس میں ہمارا قصور نہیں ۔ جو زبان زیادہ تر شعر و شاعری اور قصص تک محدود ہو، وہاں ایسا ہونا کچھ تعجب کی بات نہیں ۔ جس ملک سے ایجاد و اختراع کا مادّہ سلب ہو گیا ہو جہاں لوگ نئی چیزوں کے بنانے اور دیکھنے کے عادی نہ ہوں، وہاں جدید الفاظ کا

غیر مانوس اور اجنبی معلوم ہونا موجب حیرت نہیں۔ الفاظ کی حالت بھی انسانوں کی سی ہے۔ اجنبی شخص بھی رفتہ رفتہ مانوس ہو جاتے ہیں۔ اول اول الفاظ کا بھی یہی حال ہے۔ استعمال آہستہ آہستہ غیر مانوس کو مانوس کر دیتا ہے اور صحت و غیر صحت کا فیصلہ زمانہ کے ہاتھ میں ہوتا ہے۔ ہمارا فرض یہ ہے کہ لفظ تجویز کرتے وقت ہر پہلو پر کامل غور کرلیں، آئندہ چل کر اگر وہ استعمال اور زمانہ کی کسوٹی پر پورا اترا تو خود ٹکسالی ہو جائیگا اور اپنی جگہ آپ پیدا کرلیگا۔ علاوہ اس کے جو الفاظ پیش کئے گئے ہیں وہ الہامی نہیں کہ جن میں ردّ و بدل نہ ہو سکے، بلکہ **فرہنگِ اصطلاحاتِ عثمانیہ** جو زیر ترتیب ہے پہلے اس کا مسودہ اہل علم کی خدمت میں پیش کیا جائے گا اور جہاں تک ممکن ہو گا اس کی اصلاح میں کوئی دقیقہ فروگذاشت نہیں کیا جائے گا۔

لیکن ہماری مشکلات صرف **اصطلاحات علمیہ** تک ہی محدود نہیں ہیں۔ ہمیں ایک ایسی زبان سے ترجمہ کرنا پڑتا ہے جو ہمارے لئے بالکل اجنبی ہے، اس میں اور ہماری زبان میں کسی قسم کا کوئی رشتہ یا تعلق نہیں۔ اس کا طرز بیان، ادائے مطلب کے اسلوب، محاورات وغیرہ بالکل جدا ہیں۔ جو الفاظ اور جملے انگریزی زبان میں بالکل معمولی اور روز مرہ کے استعمال میں آتے ہیں، اُن کا ترجمہ جب ہم اپنی زبان میں کرنے بیٹھتے ہیں تو سخت دشواری پیش آتی ہے۔ ان تمام دشواریوں پر

غالب آنے کے لئے مترجم کو کیسا کچھ خونِ جگر کھانا نہیں پڑتا۔ ترجمہ کا کام، جیسا کہ عموماً خیال کیا جاتا ہے، کچھ آسان کام نہیں ہے۔ بہت خاک چھاننی پڑتی ہے تب کہیں گوہر مقصود ہاتھ آتا ہے۔

اس سررشتہ کا کام صرف یہی نہ ہوگا (اگرچہ یہ اس کا فرضِ اولین ہے) کہ وہ نصاب تعلیم کی کتابیں تیار کرے، بلکہ اس کے علاوہ وہ ہر علم پر متعدّد اور کثرت سے کتابیں تالیف و ترجمہ کرائے گا، تاکہ لوگوں میں علم کا شوق بڑھے، ملک میں روشنی پھیلے، خیالات و قلوب پر اثر پیدا ہو، جہالت کا استیصال ہو۔ جہالت کے معنی اب لاعلمی ہی کے نہیں بلکہ اس میں افلاس، کم ہمتی، تنگ دلی، کوتہ نظری، بے غیرتی، بد اخلاقی سب کچھ آجاتا ہے۔ جہالت کا مقابلہ کرکے اسے پس پا کرنا سب سے بڑا کام ہے۔ انسانی دماغ کی ترقی علم کی ترقی ہے۔ انسانی ترقی کی تاریخ علم کی اشاعت و ترقی کی تاریخ ہے۔ ابتدائے آفرینش سے اس وقت تک انسان نے جو کچھ کیا ہے، اگر اس پر ایک وسیع نظر ڈالی جائے تو نتیجہ یہ نکلے گا کہ جوں جوں علم میں اضافہ ہوتا گیا، پچھلی غلطیوں کی صحت ہوتی گئی، تاریکی گھٹتی گئی، روشنی بڑھتی گئی، انسان میدانِ ترقی میں قدم آگے بڑھاتا گیا۔ اسی مقدس فرض کے ادا کرنے کے لئے یہ سررشتہ قائم کیا گیا ہے اور وہ اپنی بساط کے موافق اس کے انجام دینے میں کوتاہی نہ کرے گا۔

لیکن غلطی، تحقیق و جستجو کی گھات میں لگی رہتی ہے۔ ادب کا

کامل ذوق سلیم ہر ایک کو نصیب نہیں ہوتا۔ بڑے بڑے نقاد اور مبصر فاش غلطیاں کر جاتے ہیں۔ لیکن اس سے ان کے کام پر حرف نہیں آتا۔ غلطی ترقی کے مانع نہیں ہے، بلکہ وہ صحت کی طرف رہنمائی کرتی ہے پچھلوں کی بھول چوک آنے والے مسافر کو رستہ بھٹکنے سے بچا دیتی ہے۔ ایک جاپانی ماہر تعلیم (بیرن کی کوچی) نے اپنے ملک کا تعلیمی حال لکھتے ہوئے اس صحیح کیفیت کا ذکر کیا ہے جو ہونہار اور ترقی کرنے والے افراد اور اقوام پر گزرتی ہے۔

"ہم نے بہت سے تجربے کئے اور بہت سی ناکامیاں اور غلطیاں ہوئیں، لیکن ہم نے ان سے نئے سبق سیکھے اور فائدہ اٹھایا۔ رفتہ رفتہ ہمیں اپنے ملک کی تعلیمی ضروریات اور امکانات کا صحیح اور بہتر علم ہوتا گیا اور ایسے تعلیمی طریقے معلوم ہوتے گئے جو ہمارے اہل وطن کے لئے زیادہ موزوں تھے۔ ابھی بہت سے ایسے مسائل ہیں جو ہمیں حل کرنے ہیں، بہت سی ایسی اصلاحیں ہیں جو ہمیں عمل میں لانی ہیں، ہم نے اب تک کوشش کی اور ابھی کوشش کر رہے ہیں اور مختلف طریقوں کی برائیاں اور بھلائیاں دریافت کرنے کے درپے ہیں، تاکہ اپنے ملک کے فائدے کے لئے اچھی باتوں کو اختیار کریں اور رواج دیں اور برائیوں سے بچیں۔"

اس لئے جو حضرات ہمارے کام پر تنقیدی نظر ڈالیں انہیں وقت کی تنگی، کام کا بوجھ اور اس کی اہمیت اور ہماری مشکلات پیش نظر رکھنی چاہئیں۔ یہ پہلی سعی ہے اور پہلی سعی میں کچھ نہ کچھ خامیاں

ضرور رہ جاتی ہیں، لیکن آگے چل کر یہی خامیاں ہماری رہنما بنیں گی اور پختگی اور اصلاح تک پہنچائیں گی۔ یہ نقشِ اول ہے، نقشِ ثانی اس سے بہتر ہوگا۔ ضرورت کا احساس علم کا شوق، حقیقت کی لگن، صحت کی ٹوہ، جد و جہد کی رسائی خود بخود ترقی کے مدارج طے کرلے گی۔

جاپانی بڑے فخر سے یہ کہتے ہیں کہ ہم نے تیس چالیس سال کے عرصے میں وہ کچھ کر دکھایا جس کے انجام دینے میں یورپ کو اتنی ہی صدیاں صرف کرنی پڑیں۔ کیا کوئی دن ایسا آئے گا کہ ہم بھی یہ کہنے کے قابل ہوں گے؟ ہم نے پہلی شرط پوری کردی ہے یعنی بیجا قیود سے آزاد ہوکر اپنی زبان کو اعلیٰ تعلیم کا ذریعہ قرار دیا ہے۔ لوگ ابھی ہمارے کام کو تذبذب کی نگاہ سے دیکھ رہے ہیں اور ہماری زبان کی قابلیت کی طرف مشتبہ نظریں ڈال رہے ہیں۔ لیکن وہ دن آنے والا ہے کہ اس ذرّے کا بھی ستارہ چمکے گا، یہ زبان علم و حکمت سے مالا مال ہوگی اور اعلیحضرت واقدس کی نظر کیمیا اثر کی بدولت یہ دنیا کی مہذب و شایستہ زبانوں کی ہمسری کا دعوے کرے گی۔ اگرچہ اُس وقت ہماری سعی اور محنت حقیر معلوم ہوگی، مگر یہی شامِ غربت صبحِ وطن کی آمد کی خبر دے رہی ہے، یہی شب بیداریاں روزِ روشن کا جلوہ دکھائیں گی، اور یہی مشقت اُس قصرِ رفیع الشان کی بنیاد ہوگی جو آئندہ تعمیر ہونے والا ہے۔ اس وقت ہمارا کام صبر و استقلال سے میدان صاف کرنا،

داغ بیل ڈالنا اور نیو کھودنا ہے، اور فرہاد وار شیرینِ حکمت کی خاطر سنگلاخ پہاڑوں کو کھود کھود کر جوئے علم لانے کی سعی کرتا ہے۔ اور گو ہم نہ ہوں گے مگر ایک زمانہ آئیگا جب کہ اس میں علم و حکمت کے دریا بہیں گے اور ادبیات کی افتادہ زمین سرسبز و شاداب نظر آئے گی۔

آخر میں میں سررشتہ کے مترجمین کا شکریہ ادا کرتا ہوں جنھوں نے اپنے فرض کو بڑی مستعدی اور شوق سے انجام دیا۔ نیز میں ارکانِ مجلسِ وضعِ اصطلاحات کا شکر گزار ہوں کہ ان کے مفید مشورے اور تحقیق کی مدد سے یہ مشکل کام بخوبی انجام پا رہا ہے۔ لیکن خصوصیت کے ساتھ یہ سررشتہ جناب مسٹر محمدؐ اکبر حیدری بی۔ اے معتمد عدالت و تعلیمات و کوتوالی و امور عامہ سرکار عالی کا ممنون ہے جنہیں ابتدا سے قیام و انتظام جامعۂ عثمانیہ میں خاص انہماک رہا ہے۔ اور اگر ان کی توجہ اور امداد ہمارے شریک حال نہ ہوتی تو یہ عظیم الشان کام صورت پذیر نہ ہوتا۔ میں سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (آکسن) آئی۔ ای۔ ایس۔ ناظمِ تعلیمات سرکار عالی کا بھی شکریہ ادا کرتا ہوں کہ ان کی توجہ اور عنایت ہمارے حال پر مبذول رہی اور ضرورت کے وقت ہمیشہ بلا تکلف خوشی کے ساتھ ہمیں مدد دی۔

عبدالحق

ناظمِ سررشتۂ تالیف و ترجمہ (عثمانیہ یونیورسٹی)

ارکانِ دارالترجمہ

مولوی عبدالحق صاحب بی۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ناظم۔

قاضی محمد حسین صاحب۔ ایم۔ اے۔ رینگلر ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم ریاضیات

چودھری برکت علی صاحب بی۔ یس۔ سی ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم سائینس

مولوی سید ہاشمی صاحب ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم تاریخ۔

مولوی محمد الیاس صاحب برنی ایم۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم معاشیات

قاضی تلمذ حسین صاحب یم۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم سیاسیات

مولوی ظفر علی خاں صاحب بی۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم تاریخ۔

مولوی عبدالماجد صاحب بی۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم فلسفہ ومنطق

مولوی عبدالحلیم صاحب شرر ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مولف تاریخ اسلام

مولوی سید علی رضا صاحب بی۔ اے ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم قانون۔

مولوی عبداللہ العمادی صاحب ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ ۔ مترجم کتب عربی

علاوہ ان مذکورۂ بالا مترجمین کے مولوی حاجی صفی الدین صاحب ترجمہ شدہ کتابوں کو مذہبی نقطۂ نظر سے دیکھنے کے لئے اور نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی) ترجموں پر نظر ثانی کرنے کے لئے مقرر فرمائے گئے ہیں+

اردو مجلس وضع اصطلاحات کے ارکان

مولوی مرزا مہدی خاں صاحب کوکب وظیفہ یاب سرکار عالی (سابق ناظم مردم شماری)
مولوی حمیدالدین صاحب بی۔ اے صدر دارالعلوم
نواب حیدر یار جنگ (مولوی علی حیدر صاحب طباطبائی)
مولوی وحیدالدین صاحب سلیم
مولوی عبدالحق بی۔ اے ناظم سررشتۂ تالیف و ترجمہ

علاوہ ان مستقل ارکان کے، مترجمین سررشتۂ تالیف و ترجمہ نیز دوسرے اصحاب سے بلحاظ اُنکے فن کے مشورہ کیا گیا۔ مثلاً

خان فضل محمد خانصاحب ایم۔ اے رنگلر (پرنسپل سٹی ہائی اسکول حیدرآباد)
مولوی عبدالواسع صاحب (پروفیسر دارالعلوم حیدرآباد)
پروفیسر عبدالرحمٰن صاحب بی۔ ایس۔ سی (نظام کالج)
مرزا محمد ہادی صاحب۔ بی۔ اے (پروفیسر کرسچن کالج لکھنؤ)

مولوی سلیمان صاحب ندوی

سید راس مسعود صاحب بی۔ اے (ناظم تعلیمات حیدرآباد) وغیرہ

علم حرکت

فہرست مضامین

بسم اللہ الرحمٰن الرحیم

علم حرکت

باب اول

رفتار

(۱) ایک نقطہ کو حرکت کرتا ہوا اس حالت میں کہتے ہیں جب کہ اس کا مقام وقت کی ہر آن میں بدل رہا ہو۔ اگر ایک متحرک نقطے کا مقام وقت کی ایک آن میں ط ہو اور بعدہ ایک اور آن میں ق ہو تو درمیانی وقت میں اس کے مقام کی تبدیلی ط ق ہوگی۔ یکے بعد دیگرے متحرک نقطے کے تمام مقامات میں سے جو خط کھینچا جائے وہ اس نقطہ کا طریق یا راستہ کہلاتا ہے۔

(۲) **چال** ۔تعریف۔ متحرک نقطے کے راستہ چلنے کی شرح کو اس کی چال کہتے ہیں۔

متحرک نقطے کی چال اس حالت میں یکساں کہلاتی ہے جب کہ وہ مساوی اوقات میں اپنے راستہ کے مساوی حصے

طے کرے۔ خواہ اوقات کی مدت کتنی ہی کم ہو۔

فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی ایک گھنٹہ میں ۳۰ میل چلتی ہے اور دوسرے گھنٹے میں ۳۰ میل اور پھر تیسرے میں بھی ۳۰ میل۔ اور چند گھنٹوں میں بھی اسی طرح چلتی ہے۔ تو ہم یقیناً یہ نہیں کہہ سکتے کہ اس کی چال یکساں ہے جب تک کہ ہم کو یہ معلوم نہ ہو کہ وہ ایک منٹ میں نصف میل چلتی ہے اور ایک سیکنڈ میں ۴۴ فٹ اور ایک گھنٹے کے ہزارویں حصے میں ۳۰ میل کا ہزارواں حصہ اور ایک گھنٹے کے کروڑویں حصے میں ۳۰ میل کا کروڑواں حصہ۔ اور اسی طرح وقت کی ہر ایک مقدار کے لئے خواہ وہ کتنی قلیل ہو۔

جب کسی نقطے کی چال یکساں ہو تو اس کا اندازہ وہ فاصلہ ہے جو نقطہ وقت کی ایک اکائی میں طے کرے۔ اور اگر نقطے کی چال ہر آن میں بدل رہی ہو۔ تو کسی خاص آن میں اس کا اندازہ وہ فاصلہ ہے جو نقطہ وقت کی ایک اکائی میں طے کرے اگر وہ وقت کی اس اکائی میں اسی چال سے چلتا رہے۔ جو اس خاص آن میں اس کی چال ہے۔

اگر ہم یہ کہیں کہ ایک ریل گاڑی وقت کی ایک خاص آن میں ۴۰ میل فی گھنٹہ کی چال سے چل رہی ہے۔ تو اس سے ہمارا یہ مطلب نہیں ہے کہ وہ گزشتہ ایک گھنٹہ میں ۴۰ میل چل چکی ہے اور نہ یہ مطلب ہے کہ وہ آئندہ ایک گھنٹے میں ۴۰ میل چلے گی۔ بلکہ یہ مطلب ہے کہ اگر ایک گھنٹے تک

اس کی چال وہی رہے جو اس خاص آن میں ہے تو اس ایک گھنٹے میں وہ ۴۰ میل چلے گی۔

اگر ایک نقطے کی چال یکساں نہ ہو تو کسی آن میں اس کا اندازہ بطریق ذیل لگایا جا سکتا ہے۔ فرض کرو کہ اس خاص آن کے بعد $\frac{۱}{۱۰}$ سیکنڈ کی مدت میں نقطے نے فاصلہ ف طے کیا۔ تو مقدار $\frac{\text{ف}}{\frac{۱}{۱۰}}$ یعنے $\frac{\text{فاصلہ جو طے ہوا}}{\text{وقت جس میں یہ فاصلہ طے ہوا}}$ تقریباً مطلوبہ چال کے برابر ہے۔ اگر اس سے زیادہ تقریبی اندازہ لگانا مقصود ہو تو فرض کرو کہ اس خاص آن کے بعد $\frac{۱}{۱۰۰}$ سیکنڈ میں نقطے نے فاصلہ $\text{ف}_۱$ طے کیا۔ تو $\frac{\text{ف}_۱}{\frac{۱}{۱۰۰}}$ یعنے $\frac{\text{فاصلہ جو طے ہوا}}{\text{وقت جس میں یہ فاصلہ طے ہوا}}$ زیادہ تقریبی اندازہ ہے۔ اور اس سے زیادہ تقریبی اندازہ $\frac{\text{ف}_۲}{\frac{۱}{۱۰۰۰}}$ ہے جہاں $\text{ف}_۲$ وہ فاصلہ ہے جو آن مذکور کے بعد نقطے نے $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سیکنڈ میں طے کیا۔ یہی عمل جاری رکھنے سے چال کے اور بھی زیادہ تقریبی اندازے لگ سکتے ہیں۔

پس اگر کسی نقطے کی چال ہر آن بدل رہی ہو تو ہم بخوبی سمجھ سکتے ہیں کہ کسی خاص آن میں نقطے کی چال کا مفہوم کیا ہے۔

حسابی زبان میں اس مفہوم کو اس طرح ادا کیا جاتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک خاص آن کے بعد تھوڑے سے وقت

و میں متحرک نقطہ اپنے راستہ کا اتنا حصہ طے کرتا ہے کہ اس کا طول ف ہے تو آن مذکور میں متحرک نقطے کی چال کا اندازہ $\frac{ف}{و}$ کی انتہائی قیمت ہے جب کہ وقت و کو کم سے کم کرتے چلے جائیں۔ اسی طرح اگر کوئی بدلنے والی مقدار ہو خواہ روپیہ یا کسی ملک کی آبادی یا کوئی اور چیز جس کی تبدیلی حساب و شمار میں آسکتی ہے تو ایسی مقدار کی شرح تبدل $\frac{ت}{و}$ کی انتہائی قیمت ہے جہاں تھوڑے سے وقت و میں اس مقدار کی تبدیلی ت ہے۔

(۴) طول اور وقت کی اکائیاں جو انگلستان میں عام طور پر استعمال ہوتی ہیں وہ ایک فٹ اور ایک سیکنڈ یا ثانیہ ہیں ایک فٹ ایک گز کا تیسرا حصہ ہے اور ویسٹ منسٹر میں پیتل کی ایک ٹھوس سلاخ محفوظ ہے۔ جس میں سونے کی دو کیلیں جڑی ہیں اور ان دو کیلوں کے درمیان جو فاصلہ ہے وہ ایک گز کہلاتا ہے۔

جتنے وقت میں زمین اپنے محور کے گرد ایک پوری گردش کرتی ہے وہ ایک دن ہے۔ ایک دن میں ۲۴ گھنٹے ہوتے ہیں اور ایک گھنٹے میں ۶۰ منٹ اور ایک منٹ میں ۶۰ سکنڈ ہوتے ہیں سیکنڈ یا ثانیہ کی تعریف یہی ہے۔

علمی پیمائش میں طول کی اکائی سینٹی میٹر ہے جو ایک میٹر کا $\frac{1}{100}$ ہے۔ شروع میں میٹر کی تعریف یوں کی گئی تھی کہ وہ سطح زمین کے ایک ربع یعنی قطب شمالی اور خط استوا کے

درمیانی فاصلے کا کروڑواں حصہ ہے۔لیکن عمل اس پر ہے کہ پیرس میں پلاٹینم کی ایک خاص سلاخ محفوظ ہے۔اس کے طول کو میٹر کہتے ہیں۔ایک میٹر تقریباً ۳۹،۳۷ انچ کے مساوی ہے اس لئے ایک فٹ تقریباً ۳۰،۴۸ سینٹی میٹر کے برابر ہے۔ میٹر کے دسویں حصہ کو ڈیسی میٹر اور ہزارویں حصے کو ملی میٹر کہتے ہیں۔

(۴) چال کی اکائی ایک ایسے متحرک نقطے کی چال کو کہتے ہیں جو وقت کی ایک اکائی میں طول کی ایک اکائی یکساں طے کرے۔پس چال کی اکائی ان دو اکائیوں پر منحصر ہے اس لئے اگر ان میں سے ایک یا دونوں تبدیل ہوں تو چال کی اکائی میں بھی عموماً تبدیلی واقع ہوگی۔

(۵) اگر ایک نقطے کی چال ل ہو تو اس کے یہ معنی ہیں کہ وہ وقت کی ایک اکائی میں طول کی ل اکائیاں طے کرتا ہے۔

لہٰذا نقطہ مذکورہ وقت کی و اکائیوں میں طول کی ل و اکائیاں طے کریگا۔پس چال ل سے چلنے والا نقطہ وقت و میں اگر فاصلہ ف طے کرے تو ف = ل و۔

اگر چال کا اندازہ ایک قسم کی اکائیوں میں لگایا گیا ہو تو دوسری قسم کی اکائیوں میں اس کی تبدیلی آسانی سے ہوسکتی ہے۔

مثلاً ۶۰ میل فی گھنٹہ کی چال وہی ہے جو ایک میل فی منٹ ہے۔

یا $\frac{1}{60}$ میل فی سکنڈ
یا $\frac{5280}{60}$ فٹ فی سیکنڈ
یعنی ۸۸ فٹ فی سیکنڈ

مثال (۱) یہ فرض کرکے کہ زمین کا مرکز ۳۶۵ دنوں میں ۹۳۰۰۰۰۰۰ میل نصف قطر کا دائرہ طے کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کی چال ۱۸٫۵ میل فی ثانیہ ہے۔

مثال (۲) یہ تسلیم کرکے کہ روشنی آفتاب سے زمین تک ۸ سکنڈ میں پہنچتی ہے ثابت کرو کہ روشنی کی چال ۱۹۴۰۰۰ میل فی ثانیہ ہے۔

(۶) **نقل مکان**۔ ایک متحرک نقطے کے مقام کی تبدیلی کو اس کی نقل مکان کہتے ہیں۔ اگر متحرک نقطے کے مقام اول و آخر کے خطِ وصل کا طول اور سمت دونوں معلوم ہوں تو اس کی نقل مکان معلوم ہو سکتی ہے پس نقل مکان کی مقدار بھی ہوتی ہے اور سمت بھی۔

مثال (۱) ایک آدمی سو میل عین مشرق کی طرف جاتا ہے اور پھر ۴ میل ٹھیک شمال کی طرف ثابت کرو کہ اس کی نقل مکان ۵ میل ہے اور مشرق سے شمال کی جانب زاویہ $\tan^{-1}\frac{4}{3}$ بناتی ہے۔

مثال (۲) ایک جہاز ایک میل جنوب کی طرف جاتا ہے اور پھر $4\sqrt{2}$ میل جنوب مغرب کی جانب ثابت کرو کہ اس کی نقل مکان $\sqrt{41}$ میل ہے اور جنوب سے مغرب کی

طرف زاویہ مس $\frac{1}{2}$ بناتی ہے۔

مثال (۳) ایک جہاز حسب ذیل چلتا ہے۔ تمام زاویے شمال سے مشرق کی طرف شمار کئے گئے ہیں۔

۵ میل بہ زاویہ °۲۲۵

۶ میل بہ شمال

۲ میل بہ زاویہ °۹۰

۳ میل بہ زاویہ °۱۳۵

۴ میل بہ زاویہ °۳۰۰

کل فاصلہ چلنے میں ۲ گھنٹے صرف ہوئے اور پانی شرق سے بجانب غرب ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے۔

ثابت کرو کہ جہاز کے مقام اول و آخر کا درمیانی فاصلہ تقریباً ۱۸ء۱۰ میل ہے۔ اور یہ کہ اس نے مغرب کی جانب تقریباً ۸۸ء۸ میل کا فاصلہ طے کیا ہے۔

(۷) **رفتار۔ تعریف۔** ایک متحرک نقطے کی نقل مکان کی شرح اس کی رفتار کہلاتی ہے۔

لہذا رفتار کی مقدار بھی ہوتی ہے اور سمت بھی۔

ایک نقطے کی رفتار یکساں اسوقت کہلاتی ہے۔ جب کہ وہ ایک مستقل سمت میں حرکت کررہا ہو اور مساوی اوقات میں اپنے راستے کے مساوی طول طے کرے۔ اوقات کی مقدار خواہ کتنی ہی قلیل ہو۔ یکساں رفتار کا اندازہ اس نقل مکان سے کیا جاتا ہے جو وقت کی ایک اکائی میں ظہور پذیر ہو۔ اور بدلنے والی رفتار کا اندازہ ایک خاص آن میں بطریق ذیل کیا جاتا ہے:۔ فرض کرو کہ آن مذکور کے بعد

وقت کی ایک اکائی میں رفتار وہی رہتی ہے۔ جو آن مذکور میں ہے۔ تو وقت کی اس ایک اکائی میں جو نقل مکان ہو وہ آن مذکور میں رفتار کا اندازہ ہے۔

جیسا کہ دفعہ (۲) میں بیان ہوا۔ اگر ایک متحرک نقطے کی رفتار یکساں نہ ہو تو کسی خاص آن میں اس کا اندازہ اسطرح ہو سکتا ہے۔ کہ آن مذکور کے بعد $\frac{۱}{۱۰}$، $\frac{۱}{۱۰۰}$، $\frac{۱}{۱۰۰۰}$ سکنڈ میں اس کی نقل مکان دریافت کی جائیں ان کے ذریعہ رفتار کا زیادہ سے زیادہ تقریبی اندازہ حاصل ہوگا۔

زبان ریاضیات میں یوں کہا جاتا ہے کہ اگر آن مذکور کے بعد تھوڑے سے وقت و میں نقل مکان ن ہو تو $\frac{ن}{و}$ کی انتہائی قیمت جب کہ و کو کم کم کرتے جائیں آن مذکور میں نقطے کی رفتار ہوگی۔

(۸) طالب علم کو یہ معلوم ہوگیا ہوگا کہ جب متحرک نقطہ خط مستقیم میں حرکت کر رہا ہو تو چال اور رفتار میں کوئی فرق نہیں ہوتا۔

اگر حرکت خط مستقیم میں نہ ہو تو چال اور رفتار میں فرق ہوتا ہے۔ مثلاً اگر ایک نقطہ ایک دائرے کے محیط پر یکساں چل رہا ہو یعنی مساوی اوقات میں (خواہ اوقات کی مقدار کتنی ہی کم ہو) قوس کے مساوی حصے طے کر رہا ہو۔ تو محیط کے مختلف مقامات پر حرکت کی سمت مختلف ہوگی۔ کیونکہ کسی خاص مقام پر یہ سمت مماس دائرہ کی سمت ہوگی۔ پس

اس صورت میں رفتار اپنے اصطلاحی معنوں میں ہر مقام پر بدل رہی ہے اور چال ہر مقام پر یکساں ہے۔

(۹) رفتار کی اکائی کی مقدار ایک ایسے نقطے کی رفتار ہے جس کی نقل مکان وقت کی ایک اکائی میں طول کی ایک اکائی ہو۔

جب ہم کہتے ہیں کہ ایک متحرک نقطے کی رفتار س ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی رفتار میں رفتار کی س اکائیاں ہیں یعنی یہ کہ وقت کی ایک اکائی میں اس کی نقل مکان طول کی س اکائیاں ہیں اگر ایک متحرک نقطے کی رفتار ایک سمت میں س ہو تو اس کے مساوی رفتار متقابل سمت میں لازماً (-س) سے تعبیر ہوگی۔

بعض مولفین الفاظ ''فٹ سکنڈ'' کو ''ایک فٹ فی سکنڈ کی رفتار'' کے معنوں میں استعمال کرتے ہیں۔ مثلاً ''تین فٹ سکنڈ کی رفتار'' سے ان کا مطلب ''تین فٹ فی سیکنڈ کی رفتار'' ہوتا ہے۔ اسی طرح ''۱۰ سینٹی میٹر سیکنڈ کی رفتار'' سے ''۱۰ سینٹی میٹر فی سکنڈ کی رفتار'' مفہوم ہوتا ہے۔

(۱۰) چونکہ ایک نقطے کی رفتار اس وقت معلوم ہوتی ہے جب کہ اس کی مقدار اور سمت دونوں معلوم ہوں اس لئے رفتار کو اگر ہم ایک خط مستقیم اب سے تعبیر کریں تو مناسب ہے۔ مثلاً جب ہم کہیں کہ دو متحرک نقطوں کی رفتاریں مقدار اور سمت میں دو خطوط مستقیم اب اور ج د سے

تعبیر ہوتی ہیں تو ہمارا اس سے یہ مطلب ہے کہ نقطوں کی حرکت کی سمتیں خطوط اب اور ج د کے متوازی ہیں اور ان سمتوں میں رفتاروں کی مقداریں اب اور ج د کے طولوں کے متناسب ہیں۔

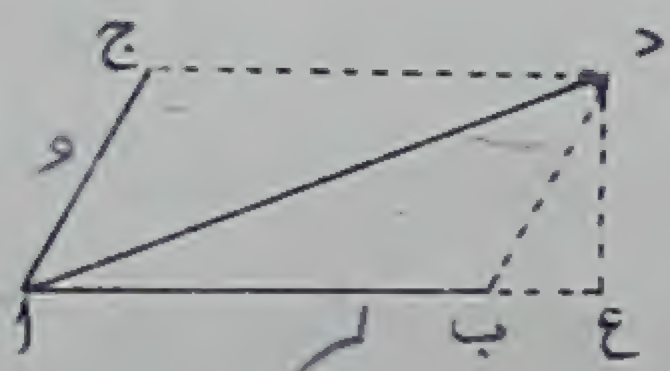
(۱۱) یہ ممکن ہے کہ ایک جسم کی رفتاریں ایک ہی وقت میں دو یا زیادہ مختلف سمتوں میں ہوں۔ اس کی ایک عام فہم مثال اس شخص کی ہے جو ایک متحرک جہاز کے عرشہ پر ایک مقام سے دوسرے مقام تک چلے اس کی ایک حرکت تو جہاز کی حرکت ہے اور دوسری اس کی اپنی حرکت جہاز کے عرشہ پر۔ یہ ظاہر ہے کہ فضا میں اس شخص کی حرکت ان دو صورتوں سے مختلف ہوگی جب جہاز ساکن ہو یا جب وہ شخص جہاز کے عرشہ پر بہ مقام اول ساکن رہے۔

اب ایک اور مثال لو۔ فرض کرو کہ ایک جہاز اس طرح چلتا ہے کہ اس کا رخ ایک سمت مستقل میں رہتا ہے۔ مان لو کہ یہ سمت شمال ہے۔ اور پانی کے بہاؤ کا زور اس کو ایک مختلف سمت یعنی جنوب مشرق کی طرف لے جاتا ہے۔ اور فرض کرو کہ ایک ملاح جہاز کے مستول پر چڑھ رہا ہے ملاح کی نقل مکان اور رفتار کا انحصار صریحاً تین مقادیر پر ہے۔ یعنی جہاز کی رفتار۔ پانی کی رفتار اور ملاح کی اپنی رفتار۔ اس کی رفتار واقعی ان تینوں رفتاروں سے مرکب ہے۔

دفعہ ذیل میں ہم دو مفروضہ رفتاروں کی ترکیب کا طریقہ بیان کریں گے۔

(۱۲) مسئلہ۔ رفتاروں کا متوازی الاضلاع۔ اگر ایک متحرک نقطے کی ایک وقت میں دو ایسی رفتاریں ہوں جن کو ایک متوازی الاضلاع کے دو متصل ضلعے (جو ایک نقطے سے کھینچے جائیں) مقدار اور سمت میں تعبیر کریں۔ تو دونو رفتاریں مل کر ایسی رفتار کے مساوی ہوں گی جو مقدار اور سمت میں متوازی الاضلاع کے اس قطر سے تعبیر ہو گی جو نقطہ مذکورہ میں سے گزرتا ہے۔

فرض کرو کہ دونو رفتاریں خطوط اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں اور ان کی مقداریں ر اور ف ہیں متوازی الاضلاع ب اج د کی تکمیل کرو۔



ہم یہ فرض کر سکتے ہیں کہ متحرک نقطہ ا سے شروع ہو کر خط اب کی سمت میں رفتار ر سے چلتا ہے اور ساتھ ہی ساتھ خط اب صفحہ ہذا پر اس طرح حرکت کرتا ہے۔ کہ نقطہ ا خط اج کی سمت میں رفتار و سے چلتا ہے وقت کی ایک اکائی میں متحرک نقطہ خط اب پر ا سے چل کر ب تک حرکت کریگا اور اسی عرصہ میں خط اب حرکت کر کے مقام ج د پر پہنچ جائیگا۔ لہذا

وقت کی ایک اکائی کے اختتام پر متحرک نقطہ د پر پہنچ جائیگا۔ چونکہ دونوں رفتاریں مقدار اور سمت میں غیر متبدل رہتی ہیں اس لئے متحرک نقطے کی رفتار ا سے لے کر د تک غیر متبدل رہیگی۔

یعنے وقت کی ایک اکائی میں نقطے کا راستہ خط مستقیم اد ہوگا پس اد مقدار اور سمت میں ان دو رفتاروں کے مساوی ہے جو اب اور اج سے تعبیر ہوتی ہیں۔

طالب علم کو ثبوت بالا کے سمجھنے میں سہولت ہوگی اگر وہ یہ فرض کرے کہ اج ایک چلتے جہاز کی حرکت کی سمت ہے اور عرشہ جہاز پر اب ایک خط کھینچا ہوا ہے اور اس خط پر ایک آدمی یکساں چل رہا ہے۔

(۱۳) **تعریف**۔ اگر دو یا زیادہ رفتاریں مل کر ایک رفتار کے مساوی ہوں تو یہ ان کا حاصل کہلاتی ہے اور وہ اس کے اجزاء ترکیبی کہلاتے ہیں۔

دو رفتاروں س اور ف کا درمیانی زاویہ عہ ہے۔ ان کا حاصل بہ طریق ذیل معلوم ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ شکل دفعہ (۱۲) میں اب اور اج رفتاروں س اور ف کو تعبیر کرتے ہیں اور ان کا درمیانی زاویہ ب اج، عہ ہے۔ تو بہ ذریعہ علم مثلث

$$\text{اد}^2 = \text{اب}^2 + \text{بد}^2 - 2\,\text{اب} \times \text{بد} \times \text{جم}\,\text{ابد}$$

پس اگر ہم حاصل رفتار اد کو ی سے تعبیر کریں تو

$$\text{ی}^2 = \text{س}^2 + \text{ف}^2 + 2\,\text{س}\,\text{ف}\,\text{جم}\,\text{عہ}$$

کیونکہ زاویہ ابد $= \pi -$ عہ

نیز اگر ہم زاویہ ب ا د کو طہ سے تعبیر کریں تو

$$\frac{\text{اب}}{\text{ب د}} = \frac{\text{جب اد ب}}{\text{جب ب اد}} = \frac{\text{جب د اج}}{\text{جب ب اد}}$$

$$\therefore \frac{\text{ر}}{\text{و}} = \frac{\text{جب (عہ - طہ)}}{\text{جب طہ}} = \frac{\text{جب عہ جم طہ - جم عہ جب طہ}}{\text{جب طہ}} = \text{جب عہ عم طہ - جم عہ}$$

$$\therefore \text{عم طہ} = \frac{\text{ر + و جم عہ}}{\text{و جب عہ}}$$

$$\text{یعنے مس طہ} = \frac{\text{و جب عہ}}{\text{ر + و جم عہ}}$$

پس اگر دو رفتاریں ایک دوسرے سے زاویہ عہ بنائیں۔ تو ان کا حاصل ایک رفتار $\sqrt{\text{ر}^2 + \text{و}^2 + \text{۲ ر و جم عہ}}$ کے مساوی ہے جو رفتار ر کی سمت سے زاویہ $\text{مس}^{-1} \frac{\text{و جب عہ}}{\text{ر + و جم عہ}}$ بناتی ہے۔

حاصل رفتار کی سمت اس طرح بھی حاصل ہو سکتی ہے۔

اب یا اب ممدودہ پر د ع عمود نکالو جو اب سے نقطہ ع پر ملے۔

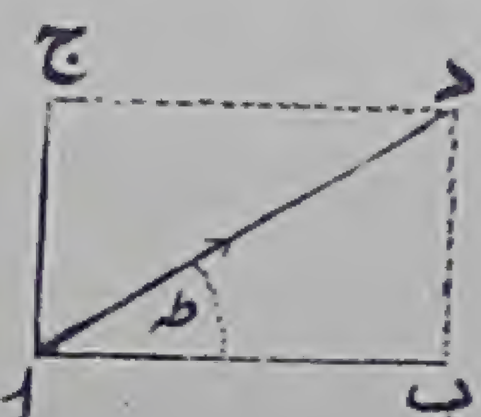
$$\text{تب مس د اب} = \frac{\text{ع د}}{\text{اع}} = \frac{\text{ب د جب د ب ع}}{\text{اب + ب د جم ع ب د}} = \frac{\text{و جب عہ}}{\text{ر + و جم عہ}}$$

(۱۴) ایک مفروضہ رفتار کو تحلیل کرنے کے لا انتہا طریقے ہیں۔ کیونکہ اگر متوازی الاضلاع کا قطر ا د دیا ہوا ہو تو اس قطر پر لا انتہا متوازی الاضلاع بن سکتے ہیں۔ او اگر اب د ج ان میں سے ایک ہو تو رفتار ا د دو رفتاروں اب اور اج کے مساوی ہوگی۔

رفتار کو تحلیل کرنے کی اہم صورت وہ ہے جس میں اسے دو ایسی سمتوں میں تحلیل کرنا مقصود ہو جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں اور ان میں سے ایک سمت دی ہوئی ہو۔جب ہم ایک خاص سمت میں ایک رفتار کے جزء تحلیلی کا ذکر کرتے ہیں تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ دوسری سمت جس میں رفتار کی تحلیل ہو گی اس خاص سمت سے زاویہ قائمہ بناتی ہے۔

مثلاً ۔ فرض کرو کہ ہم ایک رفتار س کو جو ا د سے تعبیر ہوتی ہے دو اجزاء میں تحلیل کرنا چاہتے ہیں جو ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بنائیں۔ان میں سے ایک جزء کی سمت ا ب دی ہوئی ہے جو ا د سے زاویہ طہ بناتی ہے۔

ا ب پر د ب عمود نکالو اور مستطیل ا ب د ج کی تکمیل کرو۔



رفتار س صریحاً دو رفتاروں ا ب اور ا ج کے مساوی ہے۔

نیز اب = اد جم طہ = س جم طہ

اور اج = اد جب طہ = س جب طہ

پس ہم کو ذیل کا کار آمد مسئلہ حاصل ہوا۔

اگر ایک مفروضہ رفتار کے اجزاء تحلیلی ایک خاص سمت میں اور اس کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتی ہوئی سمت میں مطلوب ہوں۔تو ان میں سے پہلا جزء س جم طہ ہوگا اور دوسرا س جب طہ۔جس صورت میں زاویہ طہ ایک قائمہ سے

بڑا ہو وہ سکونیات کی دفعہ ۳۰ کے طریقے سے حل ہو سکتی ہے

مثال (۱) ایک شخص شمال مشرق کی جانب ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے۔ اس کی رفتار کے اجزاء تحلیلی شمال اور مشرق کی سمتوں میں جداگانہ دریافت کرو۔

جواب۔ ہر ایک $۲\sqrt{۲}$ میل فی گھنٹہ ہے۔

مثال (۲) ایک نقطہ ایک خط مستقیم میں ۱۰ فٹ فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اس کی رفتار کا جزء تحلیلی ایک ایسی سمت میں دریافت کرو جو اس کی حرکت کی سمت سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے۔

جواب $۵\sqrt{۳}$ فٹ فی سکنڈ۔

مثال (۳) ایک جسم ایک سطح مایل پر نیچے کی طرف پھسل رہا ہے سطح کا میلان افق سے ۶۰° ہے اس کی رفتار کے اجزاء افقی اور عمودی سمتوں میں معلوم کرو۔

جواب $\frac{ر}{۲}$ اور $\frac{ر\sqrt{۳}}{۲}$، جہاں ر جسم کی رفتار ہے۔

(۱۵) اگر ایک رفتار کے اجزاء ترکیبی دو ایسی سمتوں میں مطلوب ہوں جو رفتار مذکور سے زاویے ع اور ب بنائیں۔ تو طرز عمل یہ ہوگا۔

فرض کرو کہ ا د رفتار ر کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرتا ہے ا ب اور ا ج ایسے خطوط کھینچو جو ا د سے زاویے ع اور ب بنائیں۔ اور د میں سے دو ایسے خطوط کھینچو جو متوازی الاضلاع ا ب د ج کی تکمیل کریں۔ جیسا کہ

دفعہ (١٢) میں کیا گیا تھا۔

چونکہ ایک مثلث کے اضلاع زوایاے مقابل کی جیبوں کے متناسب ہوتے ہیں اس لئے

$$\frac{\text{اب}}{\text{جب ادب}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جب ب اد}} = \frac{\text{اد}}{\text{جب اب د}}$$

یعنی

$$\frac{\text{اب}}{\text{جب به}} = \frac{\text{ب د}}{\text{جب عه}} = \frac{\text{اد}}{\text{جب(عه+به)}}$$

$$\therefore \text{اب} = \text{اد} \frac{\text{جب به}}{\text{جب(عه+به)}} \quad \text{اور ب د} = \text{اد} \frac{\text{جب عه}}{\text{جب(عه+به)}}$$

پس ان دو سمتوں میں رفتار کے اجزاء ترکیبی یہ ہوئے۔

$$\frac{\text{ر جب به}}{\text{جب (عه+به)}} \quad \text{اور} \quad \frac{\text{ر جب عه}}{\text{جب (عه+به)}}$$

(١٦) **رفتاروں کا مثلث** ۔ اگر ایک متحرک نقطے کی رفتاریں ایک وقت میں ایسی ہوں جو ایک مثلث کے اضلاع اب اور ب ج سے بالترتیب تعبیر ہوں۔ تو دونوں رفتاریں ایک ایسی رفتار کے مساوی ہوں گی جو اج سے تعبیر ہوتی ہے۔

متوازی الاضلاع اب ج د کی تکمیل کرنے سے یہ ظاہر ہے کہ جن رفتاروں کو خطوط اب اور ب ج تعبیر کرتے ہیں انہی رفتاروں کو خطوط اب اور اد تعبیر کریں گے لہذا ان کی حاصل رفتار اج سے تعبیر ہوگی۔

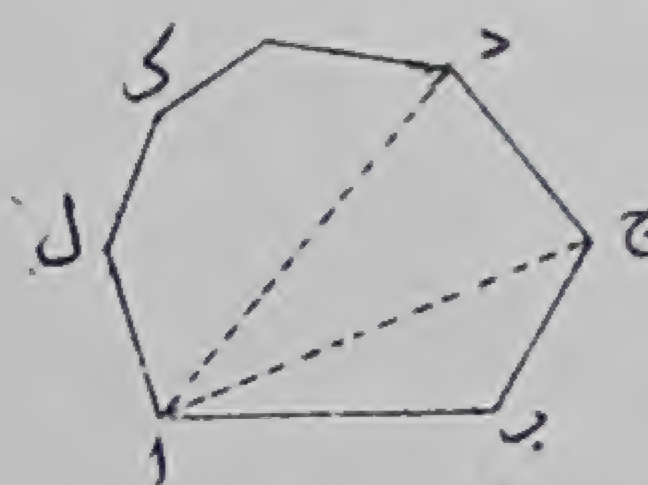
نتیجہ صریح (۱) اگر ایک ہی وقت ایک نقطے کو تین ایسی رفتاریں دی جائیں جو ایک مثلث کے اضلاع سے تعبیر ہوں جبکہ اضلاع کو ایک ہی رخ لیا جائے تو نقطہ ساکن رہیگا۔

نتیجہ صریح (۲) اگر ایک متحرک نقطے کی رفتاریں ل × و ا اور م × و ب سے تعبیر ہوں۔ تو دونوں مل کر ایک رفتار (ل + م) × و ک کے مساوی ہوں گی جہاں ک، ا ب پر ایسا نقطہ ہے کہ ل × ا ب = م × ک ب کیونکہ رفتاروں کے مثلث کے مسئلے کے ذریعہ رفتار ل × و ا، دو رفتاروں ل × و ک اور ل × ک ا کے مساوی ہے اور رفتار م × و ب، دو رفتاروں م × ک ب اور م × و ک کے برابر ہے۔ لیکن رفتاریں ل × ک ا اور م × ک ب ایک دوسرے کو معدوم کرتی ہیں۔ پس حاصل (ل + م) × و ک کے برابر ہے۔

(۱۷) رفتاروں کا ذواربعۃ السطوح۔ جس طرح رفتاروں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ ثابت ہوا۔ اسی طرح یہ ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر تین رفتاریں ایک ذواربعۃ السطوح کے ایک کونے پر ملنے والے تین کناروں سے تعبیر ہوں تو ان کی حاصل رفتار ذواربعۃ السطوح کے اس کونے میں سے گزرنیوالے قطر سے تعبیر ہوگی۔ برعکس اس کے ایک رفتار تین اجزا میں تحلیل ہو سکتی ہے۔

(۱۸) رفتاروں کا کثیر الاضلاع۔ اگر ایک متحرک

نقطے کی رفتاریں ایک وقت میں ایسی ہوں جو ایک کثیرالاضلاع کے اضلاع اب، ب ج، ج د، ... ک ل سے تعبیر ہوں (خواہ کثیرالاضلاع کے ضلعے ایک سطح میں ہوں یا نہ ہوں) تو حاصل رفتار ا ل سے تعبیر ہو گی۔

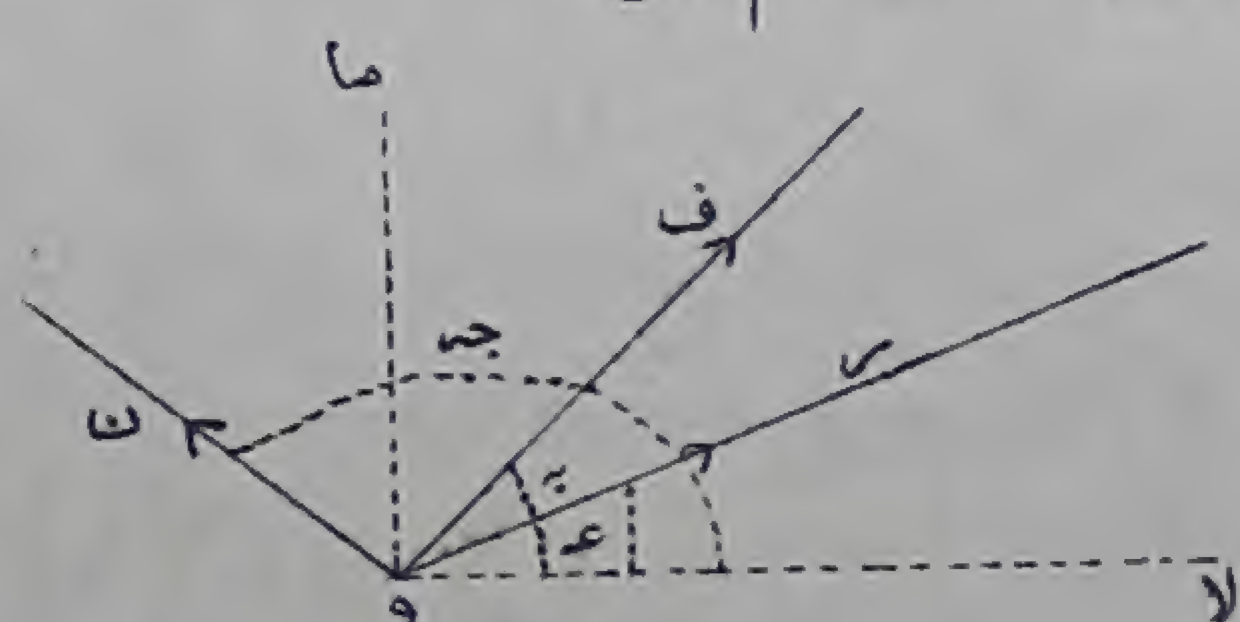


کیونکہ بہ موجب دفعہ (۱۶) رفتاریں اب اور ب ج رفتار ا ج کے مساوی ہیں۔

اور رفتاریں ا ج اور ج د، رفتار ا د کے برابر ہیں۔ علیٰ ہٰذالقیاس پس حاصل رفتار ا ل سے تعبیر ہو گی۔

نتیجہ صریح - اگر نقطہ ل، ا پر منطبق ہو یعنے کثیرالاضلاع ایک بند شکل ہو تو حاصل رفتار صفر ہو گی یعنی نقطہ ساکن رہیگا۔

(۱۹) اگر ایک نقطہ کئی ایک مختلف سمتوں میں رفتاریں رکھتا ہو۔ تو ان کا حاصل معلوم کرنے کا طریقہ یہ ہے۔ دو متقاطع علی القوایم سمتوں میں تمام رفتاروں کو تحلیل کرو اور ان دو سمتوں میں جو رفتاریں ہوں ان کی ترکیب سے کل کی حاصل رفتار معلوم ہو گی۔



فرض کرو کہ ایک نقطے کی رفتاریں س، ف، ن، ۰۰۰ ایسی سمتوں میں ہیں جو ایک ثابت خط ولا سے زاویے عہ، بہ، جہ بناتی ہیں اور فرض کرو کہ وما، ولا پر عمود ہے۔ س کے اجزاء ولا اور وما کی سمتوں میں س جم عہ اور س جب عہ ہوں گے۔ اور ف کے اجزاء، ف جم بہ اور ف جب بہ ہوں گے اسی طرح باقی رفتاروں کی تحلیل کرو۔ پس تمام رفتاروں کے اجزا یہ ہوں گے۔

س جم عہ + ف جم بہ + ن جم جہ + ۰۰۰۰۰
ولا کے متوازی۔

س جب عہ + ف جب بہ + ن جب جہ + ۰۰۰۰۰
وما کے متوازی۔

اگر حاصل رفتار ح ہو اور ولا سے زاویہ طہ بنائے تو

ح جم طہ = س جم عہ + ف جم بہ + ن جم جہ + ۰۰۰۰۰

ح جب طہ = س جب عہ + ف جب بہ + ن جب جہ + ۰۰۰۰۰

مربعے لے کر جمع کرنے سے۔

ح² = (س جم عہ + ف جم بہ + ن جم جہ + ۰۰۰)² + (س جب عہ + ف جب بہ + ن جب جہ + ۰۰۰)²

اور تقسیم کرنے سے

مس طہ = (س جب عہ + ف جب بہ + ن جب جہ + ۰۰۰) ÷ (س جم عہ + ف جم بہ + ن جم جہ + ۰۰۰۰۰)

ان دو مساواتوں سے ح اور طہ معلوم ہوں گے۔

امثلہ نمبری (۱)

(۱) ایک جہاز ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے عین شمال کی جانب چلتا ہے اور پانی کا بہاؤ اس کو $۳\sqrt{۲}$ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جنوب مشرق کی طرف لے جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ ایک گھنٹہ کے بعد جہاز کہاں ہوگا؟

جہاز کی دو رفتاریں ہیں ایک ۱۵ میل فی گھنٹہ جانب شمال اور دوسری $۳\sqrt{۲}$ میل فی گھنٹہ جانب جنوب مشرق۔ دوسری رفتار دو رفتاروں کے مساوی ہے۔ ایک $۳\sqrt{۲}$ جم ۴۵° میل فی گھنٹہ مشرق کی جانب اور دوسری $۳\sqrt{۲}$ جب ۴۵° میل فی گھنٹہ جنوب کی جانب
پس جہاز کی کل رفتار یہ ہے۔

۱۲ میل فی گھنٹہ جانب شمال

اور ۱۲ میل فی گھنٹہ جانب مشرق

لہٰذا حاصل رفتار $\sqrt{۱۲^۲ + ۳^۲}$ ہے یعنی $\sqrt{۱۵۳}$ میل فی گھنٹہ ایسی سمت میں جو شمال سے زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۱}{۴}$ بناتی ہے۔ یعنی ۱۲٫۳۷ میل فی گھنٹہ بہ زاویہ $۱۴^\circ\ ۲'$ از شمال جانب مشرق۔

(۲) ایک نقطے کی رفتاریں ایک وقت میں چار مختلف سمتوں میں ۴، ۳، ۲، اور ایک ہیں پہلی اور دوسری کے درمیان ۳۰° کا زاویہ ہے اور دوسری اور تیسری کے درمیان ۹۰° کا اور تیسری اور چوتھی کے درمیان ۱۲۰° کا۔ ان کا حاصل دریافت کرو۔

ولا پہلی رفتار کی سمت میں لو اور وھا اس کی عمودی سمت میں۔

ولا کے ساتھ رفتاریں مفصلہ ذیل زاویے بناتی ہیں۔

۰°، ۳۰°، ۱۲۰°، اور ۲۴۰°

پس اگر ح حاصل رفتار ہو اور ولا سے زاویہ ط بنائے

تو ح جم ط = ۴ + ۳ جم ۳۰° + ۲ جم ۱۲۰° + ۱ جم ۲۴۰°

یعنی ح جم ط = $۴ + ۳ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} + ۲ \times (-\frac{۱}{۲}) + ۱ \times (-\frac{۱}{۲}) = \frac{۳\sqrt{۳} + ۵}{۲}$

اور ح جب ط = $۳ \times \frac{۱}{۲} + ۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳} + ۳}{۲}$

مربع لے کر جمع کرنے سے

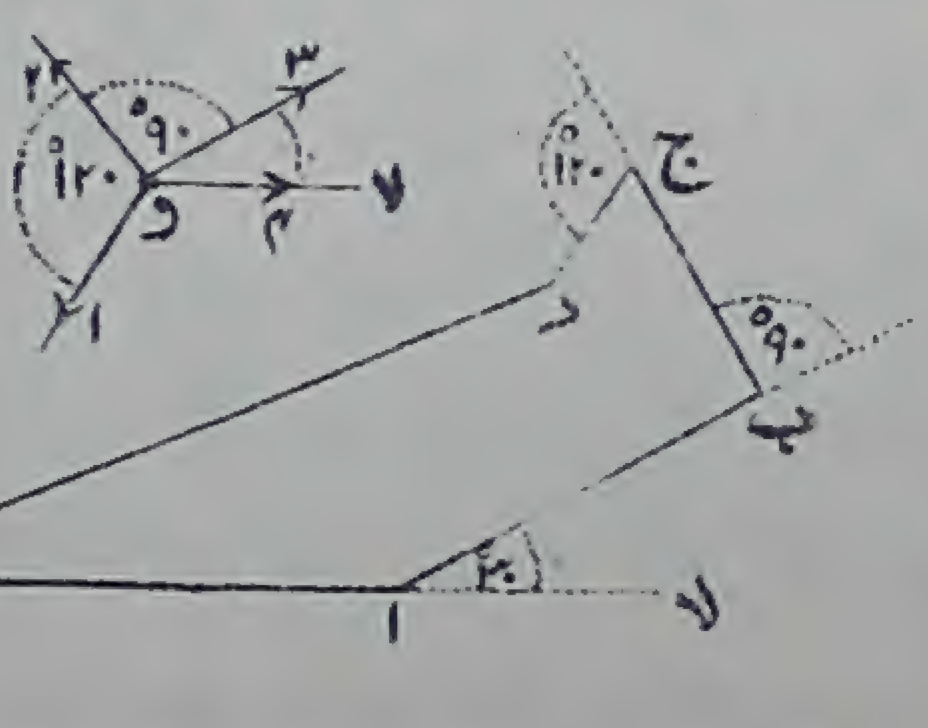
$ح^{۲} = ۱۶ + ۹\sqrt{۳} = ۳۱٫۵۸۸۵ \therefore ح = ۵٫۶۲$

اور تقسیم کرنے سے

مس ط = $\frac{\sqrt{۳} + ۳}{۳\sqrt{۳} + ۵} = ۲\sqrt{۳} - ۳ = ۰٫۴۶۴۱$ = مس ۲۴° ۵۴′

پس حاصل رفتار ۵٫۶۲ ہے اور پہلی رفتار سے ۲۴° ۵۴′ کا زاویہ بناتی ہے۔

ترسیماً۔ ولا پر وا برابر ۴ انچ کے قطع کرو۔ اور زاویہ لا ا ب برابر ۳۰° کے بناؤ اور ا ب برابر ۳ انچ کے لو۔ ب ج، ا ب پر عمود نکالو اور



۲ انچ کے مساوی قطع کرو۔ اور پھر ب ج ممدودہ سے ۱۲۰° کے

زاوئے پر ج د بہ قدر ۱ انچ کھینچو ۔ و د کو ملاؤ ناپنے سے معلوم ہوگا کہ و د = ۵٫۶۲ انچ اور زاویہ ا و د = °۲۵ تقریباً

(۳) ایک جہاز کی رفتار $\frac{1}{۲}$۸ میل فی گھنٹہ ہے جہاز پر ایک گیند اس کی عمودی سمت میں لڑھکا دی گئی ہے ۔ گیند کی رفتار ۴ گز فی سیکنڈ ہے فضا میں گیند کے راستے کی ترسیم کرو اور ثابت کرو کہ ۳۵ سیکنڈ میں ۵۴۵ فٹ طے کرتی ہے ۔

(۴) ایک کشتی ایک دریا میں اس طرح چلائی جاتی ہے کہ کشتی کا رخ ہمیشہ دریا کی سمت پر عمود وار رہتا ہے ۔ اگر دریا کا عرض ۳۰۰ فٹ ہو تو دریافت کرو کہ جہاں سے کشتی چلی ہے وہاں سے کس قدر دریا کے نیچے کی طرف دوسرے کنارے پر لگے گی ۔ کشتی کی رفتار ۶ میل فی گھنٹہ ہے اور دریا کا پانی ۲ میل فی گھنٹہ چلتا ہے ۔

(۵) ایک شخص بہ ذریعہ کشتی دریا کو عبور کرنا چاہتا ہے لیکن اس طرح کہ جہاں سے چلے اس کے عین مقابل دوسرے کنارے پر پہنچے ۔ کشتی کی رفتار دریا کی رفتار سے دو چند ہے ۔ معلوم کرو کہ کشتی کا رخ کس طرف ہونا چاہیئے ؟

(۶) ایک کشتی کی چال آب ساکن میں ۶ میل فی گھنٹہ ہے ۔ اگر دریا میں جس کی رفتار ۴ میل فی گھنٹہ ہے ۔ اس کشتی کو چلایا جائے تو ترسیماً دریافت کرو کہ کشتی کا رخ کیا ہو کہ کشتی کی حرکت دریا سے زاویہ قائمہ بنائے ۔

(۷) ایک ندی کی رفتار $\frac{1}{۲}$۱ میل فی گھنٹہ ہے ایک تیراک

جس کی رفتار $\frac{1}{2}$ ۲ میل فی گھنٹہ ہے اس ندی کو عموداً عبور کرنا چاہتا ہے۔ دریافت کرو کہ وہ کس سمت میں چلے؟ اگر کم سے کم وقت میں عبور کرنا مقصود ہو تو معلوم کرو کہ تیراک کس سمت میں تیرے۔

(۸) ایک جہاز کا رخ عین شمال کی جانب ہے اور وہ ایک دریا کو عبور کر رہا ہے جس کا پانی مغرب کی جانب بہ رہا ہے۔ ایک گھنٹے کے بعد معلوم ہوا کہ جہاز نے شمال سے غرب کی جانب °۳۰ کا زاویہ بنانے والی سمت میں ۸ $\sqrt{3}$ میل کا فاصلہ طے کیا۔ پانی اور جہاز کی رفتاریں معلوم کرو۔

(۹) دو جہاز لا اور ما دو مقامات ا اور ب پر ہیں فاصلہ اب ۵ میل ہے۔ لا، اب سے °۶۰ کا زاویہ بناتی ہوئی سمت میں ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلنے لگتا ہے۔ معلوم کرو کہ ما اسی وقت ۱۰ $\sqrt{3}$ میل کی رفتار سے کس سمت میں چلے کہ وہ لا سے ٹھیک ٹکرا جائے۔ یہ بھی دریافت کرو کہ لا سے ٹکر کس زاویہ پر ہوگی اور کتنے وقت کے بعد ہوگی؟

(۱۰) ایک ٹریم کار ایک سڑک پر ۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے۔ اس میں ایک جسم ۱۶ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے کس سمت میں پھینکا جائے کہ اس کی حاصل حرکت ٹریم کار کی عمودی سمت میں ہو۔

(۱۱) ایک جہاز شمال کی جانب ۴ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے

جا رہا ہے پانی کا بہاؤ اسے مشرق کی جانب ۳ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے لے جا رہا ہے اور اس میں ایک ملاح عمودی مستول پر ۲ فٹ فی سکنڈ کی رفتار سے چڑھ رہا ہے۔ ملاح کی رفتار اور سمت حرکت فضا میں دریافت کرو۔

(۱۲) ایک رفتار کے اجزاء ترکیبی دو سمتوں میں معلوم کرو جو اس سے ۳۰° اور ۴۵° کے زاویے بناتی ہیں۔

(۱۳) ایک نقطہ جس کی رفتاریں مختلف سمتوں میں ۷، ۸، ۱۳، ہیں ساکن ہے۔ دو چھوٹی رفتاروں کا درمیانی زاویہ دریافت کرو۔

(۱۴) ایک نقطے کی رفتاریں ۳، ۱۹، ۹ ہیں اور وہ ایک دوسرے سے ۱۲۰° کے زاویے بناتی ہیں۔ ترسیماً اور حساباً ان کا حاصل دریافت کرو۔

(۱۵) ایک وقت میں ایک نقطے کی رفتاریں س، ۲ س، ۳√۳ س، اور ۴ س ہیں پہلی اور دوسری، دوسری اور تیسری، اور تیسری اور چوتھی کے درمیانی زاویے بالترتیب ۶۰°، ۹۰°، اور ۱۵۰° ہیں۔ ترسیماً اور حساباً ثابت کرو کہ حاصل رفتار س ہے اور اس کی سمت پہلی رفتار سے ۱۲۰° کا زاویہ بناتی ہے۔

(۱۶) ایک نقطہ دو مفروضہ سمتوں میں مساوی رفتاریں رکھتا ہے۔ اگر ایک رفتار کو نصف کر دیا جائے تو وہ زاویہ بھی جو حاصل رفتار دوسری رفتار سے بناتی ہے

نصف ہو جاتا ہے۔ثابت کرو کہ رفتاروں کا درمیانی زاویہ ۱۲۰° ہے۔

(۱۷) ایک نقطے کی رفتاریں مقدار اور سمت میں ان خطوط سے تعبیر ہوتی ہیں جو ایک دائرے کے محیط کے کسی نقطے سے کسی قطر کے سروں تک کھینچی جائیں۔ثابت کرو کہ ان کا حاصل اس نقطے میں سے گزرنے والے قطر سے تعبیر ہوگا۔

(۱۸) ایک نقطے کی ایک وقت میں چار رفتاریں ہیں ۔ پہلی ۲۴ فٹ فی سیکنڈ ہے دوسری ۳۶ فٹ فی سیکنڈ پہلی سے ۴۰° کا زاویہ بناتی ہے۔تیسری ۴۸ فٹ فی سیکنڈ تیسری سے ۳۵° کا زاویہ بناتی ہے۔چوتھی ۶۰ فٹ فی سیکنڈ تیسری سے ۳۵° کا زاویہ بناتی ہے۔ترسیماً ثابت کرو کہ حاصل رفتار ۱۱۸٫۵ فٹ فی سیکنڈ ہے اور پہلی رفتار سے تقریباً ۸۲° کا زاویہ بناتی ہے۔

(۲۰) **اوسط چال اور رفتار**۔ ایک نقطے کی اوسط چال، وقت کی ایک دی ہوی مدت میں، ایک ایسے نقطے کی چال ہے۔جو اسی مدّت میں وہی راستہ یکساں چال سے طے کرے جو نقطہ مذکورہ نے طے کیا ہے۔پس ایک متحرک نقطے کی اوسط چال ایک دی ہوی مدت میں

$$= \frac{\text{کل فاصلہ جو نقطے نے مدت مذکورہ میں طے کیا}}{\text{کل وقت جس میں وہ فاصلہ طے کیا}}$$ ۔

اگر ایک شخص $10\frac{2}{5}$ سیکنڈ میں ۱۰۰ گز دوڑے تو اوس کی اوسط چال $\frac{100}{10\frac{2}{5}}$ یعنی $9\frac{8}{13}$ گز فی سیکنڈ ہے۔

دیگر فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی سٹیشن چھوڑ کر پہلے ۵ منٹ میں ایک میل چلتی ہے پھر ۱۵ منٹ، ۲۰ میل فی گھنٹہ کی چال سے چلتی ہے۔ اخیر میں ایک میل ۶ منٹ میں چل کر دوسرے سٹیشن پر ٹھیر جاتی ہے۔

کل فاصلہ جو طے ہوا $= 1 + \frac{20}{4} + 1 = 7$ میل

کل وقت جس میں فاصلہ طے ہوا $= 5 + 15 + 6 = 26$ منٹ

اس کی اوسط چال $= \frac{7}{26}$ میل فی منٹ $= \frac{7}{26} \times 60$ میل فی گھنٹہ $= 16{\cdot}15$ میل فی گھنٹہ تقریباً

ایک نقطہ مفروض کی اوسط رفتار کسی سمت میں ایک دی ہوی مدت میں

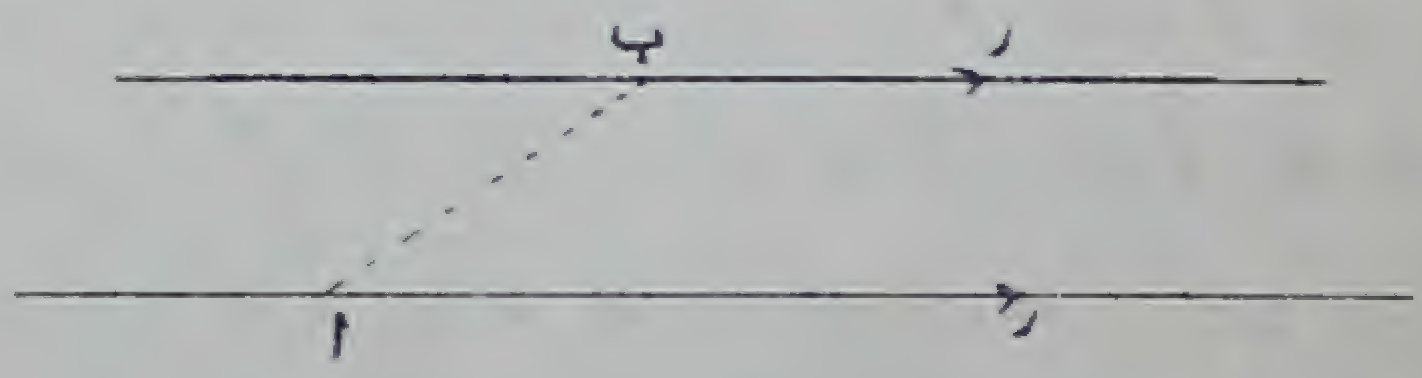
$$= \frac{\text{کل نقل مکان اس مدت میں اور اس سمت میں}}{\text{کل مدت جس میں نقل مکان ظہور پذیر ہوی}}$$

(۲۱) **حرکت اضافی**۔ سکون اور حرکت، اضافی اصطلاحیں ہیں۔ ہم حرکت مطلق سے بالکل نا واقف ہیں جو حرکت ہمیں معلوم ہے وہ سب اضافی ہے۔

مثلاً۔ جب ہم کہتے ہیں کہ ایک ریل گاڑی بہ جانب شمال ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے تو اس سے ہمارا یہ مطلب ہوتا ہے کہ اس کی یہ رفتار بہ لحاظ زمین کے ہے۔ یعنی اگر ایک شخص زمین پر ساکن ہو تو اسے

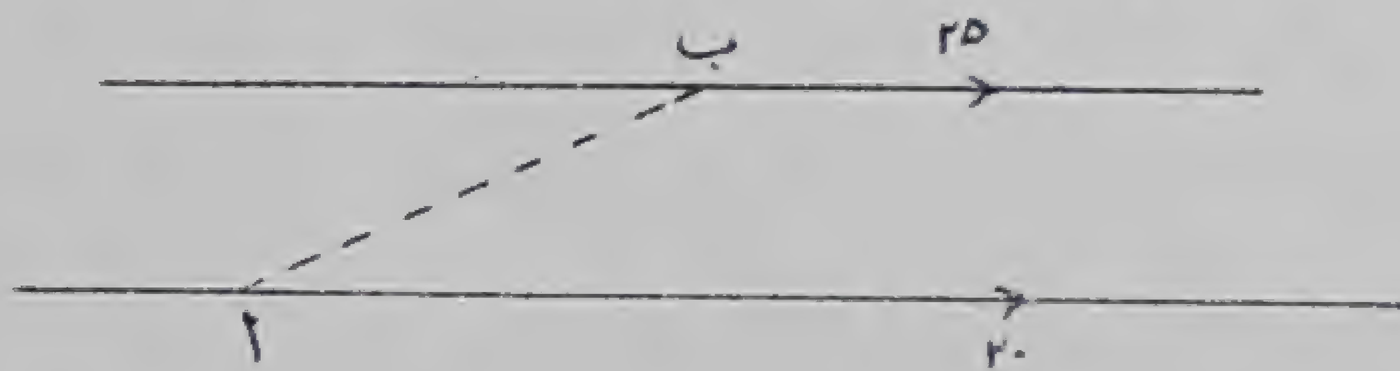
ریل گاڑی اس رفتار سے چلتی ہوئی معلوم ہوگی۔ ریل گاڑی کی یہ حرکت سطح زمین پر ہے اس حرکت کے علاوہ اسکی اور حرکتیں بھی ہیں۔ اول زمین کی روزانہ گردش اپنے محور کے گرد۔ ریل گاڑی چونکہ زمین پر ہے اس لئے وہ زمین کی اس حرکت میں شامل ہے۔ دوم زمین کی سالانہ گردش آفتاب کے گرد۔ ریل گاڑی اس حرکت میں بھی زمین کے ساتھ شامل ہے سوم اگر کل نظام شمسی کی فضا میں کوئی حرکت ہو ریل گاڑی کی اس میں بھی شمولیت ہوگی۔

(۲۲) اب اولاً دو ریل گاڑیوں کی حرکت پر غور کرو جو ایک دوسرے کے متوازی ایک ہی سمت میں مساوی رفتاروں سے چل رہی ہیں۔



فرض کرو کہ ایک گاڑی پر ایک نقطہ ا اور دوسری پر ایک نقطہ ب ہے اگر ایک شخص نقطہ ا پر کھڑا ہو کر نقطہ ب کی طرف ٹکٹکی لگا کر دیکھتا رہے۔ تو اس کو نقطہ ب بالکل ساکن معلوم ہوگا۔ کیونکہ خط ا ب کے طول اور سمت میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوگی اور ب کی رفتار

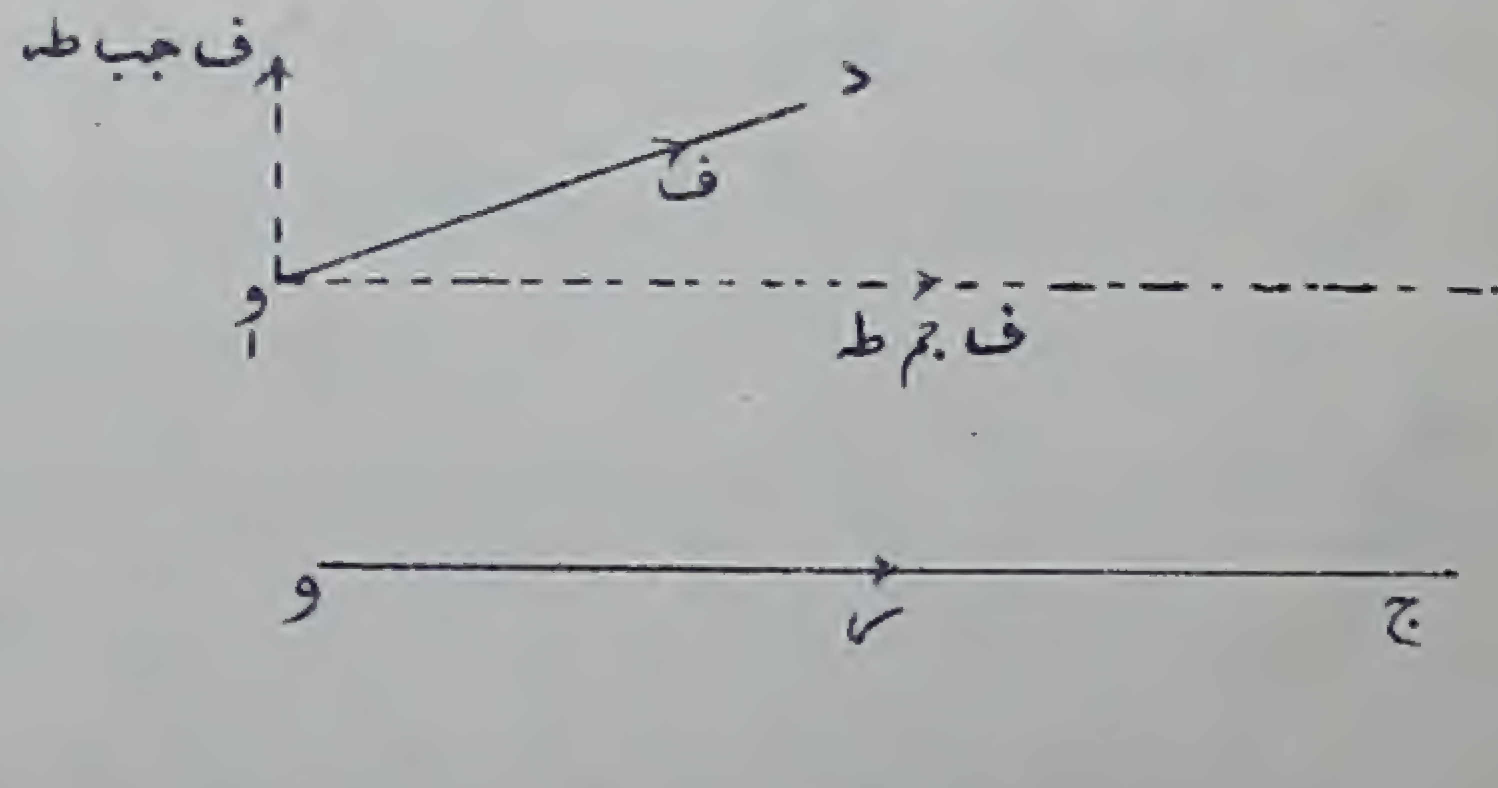
بہ لحاظ ب کے صفر ہوگی۔
ثانیاً فرض کرو کہ پہلی گاڑی کی رفتار ۲۰ میل فی گھنٹہ ہے اور دوسری کی اسی سمت میں ۲۵ میل فی گھنٹہ ہے اس صورت میں اگرہم



گاڑیوں کے درمیانی فاصلے کو نظر انداز کریں تو خط اب کا طول ۵ میل فی گھنٹہ کے حساب سے بڑھتا رہیگا اور یہی ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے ہوگی۔
ثالثاً فرض کرو کہ پہلی گاڑی کی رفتار ۲۰ میل ہے اور دوسری کی ۲۵ میل متقابل سمت میں۔ اس صورت میں خط اب کا طول بہ حساب ۴۵ میل فی گھنٹہ ا کی حرکت کے متقابل سمت میں بڑھتا رہیگا۔



اور ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے ۵۰ میل فی گھنٹہ ہوگی۔
طالب علم کو یہ معلوم ہوگیا ہوگا کہ ہر صورت میں اگر پہلی گاڑی کی رفتار کے متساوی اور متقابل رفتار کو دوسری گاڑی کی رفتار کے ساتھ ترکیب کریں تو دوسری گاڑی کی اضافی رفتار بہ لحاظ پہلی کی رفتار کے حاصل ہوگی۔
آخراً فرض کرو کہ پہلی گاڑی خط و ج کی سمت میں رفتار س سے چلتی ہے اور دوسری گاڑی رفتار ف سے خط و د کی سمت میں حرکت کرتی ہے۔ جہاں و د، و ج سے زاویہ ط بناتا ہے رفتار ف کی تحلیل دو اجزا میں کرو۔ ایک ف جم ط، و ج کے متوازی دوسرا ف جب ط، و ج پر عمود۔

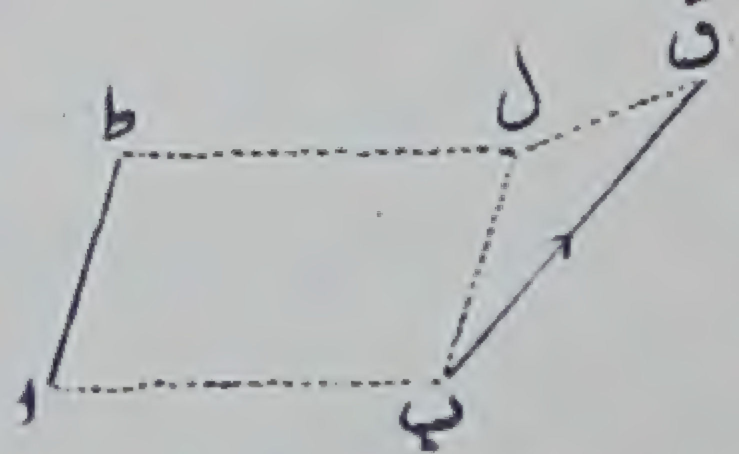


پہلے کی طرح ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے، و ج کے متوازی ف جم ط - س ہے نیز چونکہ و ج کی عمودی سمت میں

ا کی کوئی رفتار نہیں ہے اس لئے ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے اس سمت میں ف جب طہ ہے۔
لہذا ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے دو اجزا رکھتی ہے ایک ف جم طہ۔ س، و جہ کے متوازی اور دوسرا ف جب طہ، و ج پر عمود۔ اگر دوسری گاڑی کی رفتار کی ترکیب پہلی گاڑی کی رفتار کے متساوی اور متقابل رفتار سے کریں تو بھی یہی دو اجزا حاصل ہوں گے۔ پس ذیل کا کار آمد نتیجہ حاصل ہوا۔
اضافی رفتار۔ اگر دو نقاط کا درمیانی فاصلہ سمت یا مقدار میں یا سمت اور مقدار دونوں میں بدل رہا ہو تو ایک نقطہ بہ لحاظ دوسرے کے اضافی رفتار رکھتا ہے۔ اور اگر ایک نقطے ب کی اضافی رفتار بلحاظ دوسرے نقطے ا کے دریافت کرنا مطلوب ہو تو ب کی رفتار اور ا کی رفتار کے متساوی اور متقابل رفتار کا حاصل معلوم کرو۔ یہ اضافی رفتار مطلوبہ ہوگی۔
(۲۳) ایک اور پہلو سے بھی حرکت اضافی پر غور ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ خطوط ا ط اور ب ق نقاط ا اور ب کی رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں۔ یعنی ایک سیکنڈ میں دونوں نقطوں کے مقام ا اور ب سے تبدیل ہو کر بالترتیب ط اور ق ہو جاتے ہیں۔

متوازی الاضلاع ا ط ل ب کی تکمیل کرو۔ اور ل ق کو ملاؤ بہ موجب دفعہ ۱۶ رفتار ب ق، دو رفتاروں ب ل اور ل ق کے مساوی ہے۔

اور ب ل، ا ط کے مساوی اور متوازی ہے اس لئے ب کی رفتار دو رفتاروں کے برابر ہے۔ ایک ب ل، ا کی رفتار کے متساوی اور



متوازی اور دوسری ل ق۔ لہٰذا ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے، ل ق سے تعبیر ہوتی ہے۔ لیکن ل ق رفتاروں ل ب اور ب ق کا حاصل ہے یعنی ب کی رفتار اور ا کی رفتار کے متساوی اور متقابل رفتار کا حاصل۔

پس ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے معلوم کرنے کا طریقہ یہ ہوا کہ ب کی رفتار اور ا کی رفتار کے متساوی اور متقابل رفتار کا حاصل معلوم کرو یہ رفتار مطلوبہ ہوگی۔

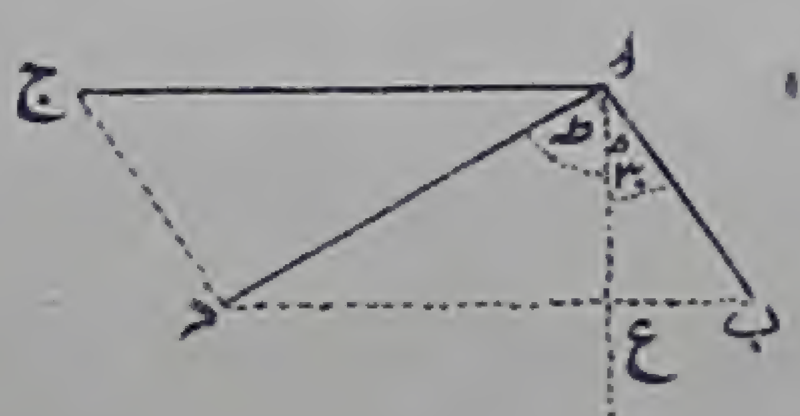
(۴۲) پچھلی دفعہ سے ظاہر ہے کہ اگر دو نقاط ا اور ب ایک ہی سمت میں بالترتیب رفتاروں س اور ف سے چلیں تو ب کی رفتار بہ لحاظ ا کے اسی سمت میں

ف - س۱ ہوگی اور ا کی رفتار بہ لحاظ ب کے س- ف ہوگی اگر وہ مختلف سمتوں میں حرکت کریں تو اضافی رفتار معلوم کرنے کے لئے رفتاروں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ استعمال کرنا ہوگا۔

مثال۔ ایک ریل گاڑی ایک افقی سڑک پر ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے اس وقت بارش بھی ہو رہی ہے اور ہوا گاڑی کی حرکت کی سمت میں زور سے چل رہی ہے۔ ہوا کے زور سے بارش سمت عمودی سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہوی پڑتی ہے اور بارش کی رفتار ۲۲ فٹ فی سیکنڈ ہے دریافت کرو کہ ریل کے مسافروں کو بارش کس سمت میں پڑتی ہوئی معلوم دیگی؟ ریل گاڑی کی رفتار ۴۴ فٹ فی سیکنڈ ہے۔

فرض کرو کہ ا ب بارش کی رفتار کو تعبیر کرتا ہے پس اگر اع عمودی خط ہو تو زاویہ ب اع ۳۰° کا ہوگا۔

اج افقی سمت میں گاڑی کی سمت کے متقابل کھینچو اور فرض کرو کہ یہ گاڑی کی رفتار یعنی ۴۴ فٹ فی سیکنڈ کو تعبیر کرتا ہے



متوازی الاضلاع ا ب د ج کی تکمیل کرو۔
ا د کو ملاؤ اور فرض کرو کہ زاویہ ع ا د = ط
مسافروں کی نظروں میں ا د بارش کی سمت ہوگی۔

مثلث ب ا د سے

$$\frac{\text{ب د}}{\text{ا ب}} = \frac{\text{جب د ا ب}}{\text{جب ب د ا}} = \frac{\text{جب}\,(\text{ط} + 30^\circ)}{\text{جم ط}}$$

$$\therefore \frac{44}{22} = \frac{\text{جب ط جم } 30^\circ + \text{جم ط جب } 30^\circ}{\text{جم ط}}$$

$$= \text{مس ط جم } 30^\circ + \text{جب } 30^\circ$$

$$\therefore 2 = \text{مس ط} \times \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}$$

$$\therefore \text{مس ط} = \sqrt{3} = \text{مس } 60^\circ$$

$$\therefore \text{ط} = 60^\circ$$

پس زاویہ ب ا د = ۹۰° یعنی بارش اپنی اصلی سمت سے زاویہ قائمہ بناتی ہوی پڑتی دکھائی دیگی۔

امثلہ نمبری (۲)

(۱) ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے اور ایک پتھر افقی سمت میں گاڑی سے زاویہ قائمہ بناتا ہو اور ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے

حرکت کرتا ہوا گاڑی سے ٹکراتا ہے۔ پتھر کی مرئی رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔

(۲) ایک جہاز ۱۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے عین مشرق کی جانب جا رہا ہے اور ایک جہاز ۱۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے عین شمال کی طرف جا رہا ہے دوسرے جہاز کی اضافی رفتار بہ لحاظ پہلے کے معلوم کرو۔

(۳) ایک جہاز جنوب کی طرف $15\sqrt{2}$ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے اور ایک دوسرا جہاز جنوب مشرق کی سمت میں ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے۔ اگر پہلے جہاز پر ایک شخص دوسرے جہاز کو دیکھ رہا ہو تو اسے دوسرا جہاز کس رفتار سے اور کس سمت میں چلتا ہوا دکھائی دیگا؟

(۴) ایک جہاز شمال مشرق کی طرف ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے اس پر ایک مسافر ہوا کی حرکت کی سمت ملاحظہ کر رہا ہے اور اسے ہوا شمال کی جانب سے $10\sqrt{2}$ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتی ہوی نظر آتی ہے ہوا کی اصلی رفتار کی مقدار اور سمت معلوم کرو۔

(۵) ایک دریا ۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جنوب کی طرف بہہ رہا ہے اور ایک جہاز بہ لحاظ دریا کے پانی کے ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے مغرب کی جانب چل رہا ہے۔ ایک ریل گاڑی عین شمال کی طرف ۳۰ میل فی گھنٹہ کی

رفتار سے جا رہی ہے۔اس کی اضافی رفتار بہ لحاظ جہاز کے معلوم کرو۔

(۶) ایک ریل گاڑی ایک سرنگ میں چل رہی ہے اور سرنگ کی چھت سے پانی کے قطرے گر رہے ہیں اور وہ ایک ریل کے مسافر کو افق سے ایک زاویہ برابر مس-۱ $\frac{1}{۲}$ بناتے ہوئے گرتے نظر آتے ہیں۔یہ معلوم ہے کہ ان کی رفتار ۲۴ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کر کے ریل گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔

(۷) ایک شخص کو جب وہ ۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتا ہے بارش کی سمت عمودی نظر آتی ہے اور جب وہ ۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتا ہے تو بارش کے قطرے اس سے ۴۵° کے زاویہ پر ٹکراتے ہیں بارش کی اصلی چال اور سمت معلوم کرو۔

(۸) ایک جہاز مغرب کی طرف ۱۴ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے اور بادلوں کی حرکت سے معلوم ہوتا ہے کہ ہوا ۷ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے شمال مغرب سے چل رہی ہے اس کی اصلی رفتار دریافت کرو اور اسکی سمت ترسیماً معلوم کرو۔

(۹) ایک ریل گاڑی ۲۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔پستول کی ایک گولی چلائی گئی ہے جو گاڑی میں آکر لگتی ہے۔گولی کی سمت گاڑی سے ایک

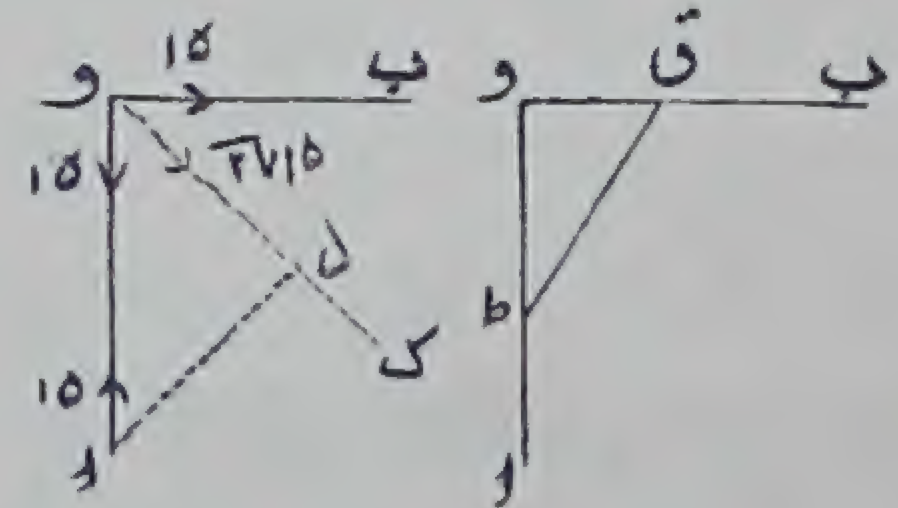
زاویہ جب ا ۳/۵ بتاتی ہے گولی گاڑی کے ایک ڈبے کے کونے میں داخل ہو کر مقابل کے کونے میں سے نکل جاتی ہے۔ پہلا کونہ بہ مقابلہ دوسرے کونے کے انجن سے بعید تر ہے۔ ڈبہ ۸ فٹ لمبا اور ۶ فٹ چوڑا ہے ثابت کرو کہ گولی کی رفتار ۸۰ میل فی گھنٹہ ہے اور وہ ڈبے میں سے ۵/۴۴ سکنڈ میں گزر جاتی ہے۔

(۱۰) دو ریل گاڑیاں جن میں سے ہر ایک کا طول ۲۰۰ فٹ ہے۔ بالترتیب ۲۰ اور ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتاروں سے ایک دوسرے کے متوازی ایک دوسرے کی طرف چل رہی ہیں۔ دریافت کرو کہ وہ ایک دوسرے سے کتنے وقت میں گزر جائیں گی؟

(۱۱) ہوا ایک ریل کی سڑک کی سمت میں چل رہی ہے۔ دو ریل گاڑیاں اس سڑک پر متقابل سمتوں میں جا رہی ہیں۔ ایک گاڑی کے انجن کا دھواں دوسرے کے دھوئیں سے دو چند رفتار رکھتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر ایک گاڑی کی رفتار ہوا کی رفتار سے سہ چند ہے۔

(۱۲) ایک جہاز جو مشرق کی جانب ۱۵ میل فی گھنٹہ کی چال سے چل رہا ہے۔ ایک مقام سے دوپہر کو گزرتا ہے۔ ایک دوسرا جہاز اسی چال سے شمال کی طرف جاتا ہے اور اسی مقام سے دن کے ڈیڑھ بجے گزرتا ہے۔ معلوم کرو کہ ایک دوسرے سے ان کا فاصلہ

کم سے کم کس وقت ہوگا اور وہ فاصلہ کس قدر ہوگا۔
فرض کرو کہ وہ مقام و ہے۔ اور فرض کرو کہ عین دوپہر کو دوسرا جہاز ا پر ہے یعنی ا و = $۲۲\frac{۱}{۲}$ میل



پہلے جہاز کی اضافی رفتار بہ لحاظ دوسرے کے اس طرح معلوم ہوگی، پہلے کی رفتار ۱۵ کے ساتھ دوسرے کی رفتار کے تساوی اور متقابل رفتار کو ترکیب کرو۔ یعنی پہلے کی رفتار ۱۵ جو شرق کی جانب ہے اس کے ساتھ ۱۵ بہ جانب جنوب ملانے سے ۱۵√۲ بہ جانب جنوب مشرق حاصل ہوی یہ مطلوبہ اضافی رفتار ہے اور وک کی سمت میں ہے۔

ال، وک پر عمود نکالو۔ ال مطلوبہ قلیل ترین فاصلہ ہے
یہ فاصلہ = وا جب اول = $۲۲\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}} = \frac{۴۵}{۴}\sqrt{۲} = ۱۵٫۹$ میل تقریباً۔

بعد دو پہر وقت مطلوب = وہ وقت جو اضافی رفتار $۱۵\sqrt{۲}$ سے فاصلہ ول طے کرنے میں لگتا ہے۔

$$= \frac{\text{ول}}{۱۵\sqrt{۲}} = \frac{۲۲\frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}}{۱۵\sqrt{۲}} = \frac{۳}{۴}\ \text{گھنٹہ}$$

یا بطرز دیگر۔فرض کرو کہ وقت ت کے بعد جہازوں کے مقام ط اور ق ہیں اور فرض کرو کہ ط ق = لا

تب $\text{وط} = \text{وا} - ۱۵\,\text{ت} = ۱۵\left(\frac{۳}{۲} - \text{ت}\right)$

اور $\text{وق} = ۱۵\,\text{ت}$

لہذا $\text{طق}^{۲} = ۱۵^{۲}\left[\left(\frac{۳}{۲} - \text{ت}\right)^{۲} + \text{ت}^{۲}\right]$

$$= ۱۵^{۲} \times ۲\left[\text{ت}^{۲} - \frac{۳}{۲}\,\text{ت} + \frac{۹}{۸}\right]$$

$$= ۲ \times ۱۵^{۲} \times \left[\left(\text{ت} - \frac{۳}{۴}\right)^{۲} + \frac{۹}{۱۶}\right]$$

چونکہ کسی مقدار کا مربع منفی نہیں ہو سکتا اس کی قلیل ترین قیمت صفر ہوگی۔پس لا کی قلیل ترین قیمت اس وقت ہوگی جب $\text{ت} = \frac{۳}{۴}$ اور اس وقت $\text{لا} = \sqrt{۲ \times ۱۵^{۲} \times \frac{۹}{۱۶}} = \frac{۴۵}{۴}\sqrt{۲} = ۱۵٫۹$ تقریباً

(۱۳) ایک جہاز شمال کی جانب ۱۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہا ہے اس جہاز سے ایک دوسرا جہاز عین اس کے مشرق کی طرف ۱۰ میل کے فاصلہ پر دیکھا جاتا ہے جو ۱۶ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے عین مغرب کی جانب جا رہا ہے۔ دریافت کرو کہ کس وقت ان کا درمیانی فاصلہ قلیل ترین ہوگا اور یہ فاصلہ بھی معلوم کرو۔

(۱۴) ا اور ب دو مقامات کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ہے

ایک نقطہ ا سے ب کی طرف ایسی رفتار سے حرکت دیا گیا ہے جو ا سے ب تک ۳ سیکنڈ میں پہنچا دے اور اسی وقت ایک دُوسرا نقطہ ب سے ا ب کی عمودی سمت میں حرکت دیا گیا ہے۔ دوسرے نقطے کی رفتار پہلے کی رفتار کا $\frac{۳}{۴}$ ہے۔ ان کی اضافی رفتار مقدار اور سمت میں معلوم کرو اور ان کا قلیل ترین فاصلہ بھی دریافت کرو اور یہ فاصلہ کس وقت ہوگا؟

(۱۵) ایک جہاز مشرق کی طرف چل رہا ہے اور ہوا شمال مغرب سے چل رہی ہے جہاز پر سے ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوی معلوم ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ جہاز اور ہوا کی چالیں مساوی ہیں۔

(۱۶) ایک شخص ۴ میل فی گھنٹہ کے حساب سے مشرق کی جانب جا رہا ہے۔ اسے معلوم ہوتا ہے کہ ہوا شمال سے چل رہی ہے۔ جب وہ اپنی چال کو دوگنا کرتا ہے تو ہوا شمال مشرق سے چلتی ہوی معلوم دیتی ہے۔ ہوا کی رفتار اور اس کی سمت معلوم کرو۔

(۱۷) ایک آدمی کو جو شمال مشرق کی طرف سفر کر رہا ہے یہ محسوس ہوتا ہے کہ ہوا شمال سے چل رہی ہے جب وہ اپنی چال کو دو چند کرتا ہے تو اسے معلوم دیتا ہے کہ ہوا ایک ایسی سمت سے چل رہی ہے جو شمال سے مشرق کی جانب زاویہ مس‌ا ۲ بناتی ہے ہوا کی اصلی

سمت دریافت کرو۔

(۱۸) دو نقطے ایک دائرے کے محیط پر مقابل سمتوں میں چلتے ہیں ایک کی رفتار س اور دوسرے کی ۲ س ہے ان کی اضافی رفتار کی سب سے بڑی اور سب سے چھوٹی قیمتیں دریافت کرو اور یہ کن مقامات پر ہوں گی؟

(۲۵) **زاویئی رفتار۔تعریف**۔اگر ایک سطح میں ایک نقطہ ط حرکت کر رہا ہو اور اسی سطح میں ایک ثابت نقطہ و اور ایک ثابت مستقیم خط ا و ہو جو ا میں سے گزرتا ہے تو زاویہ ا و ط کے بڑھنے کی شرح و کے گرد متحرک نقطے ط کی زاویئی رفتار کہلاتی ہے۔

یکساں ہونے کی حالت میں زاویئی رفتار کا اندازہ اس طرح کیا جاتا ہے وقت کی ایک اکائی میں خط و ط نے جس زاوئے میں گردش کی ہے اس میں جتنے نیم قطری ہوں گے وہ نقطہ ط کی زاویئی رفتار کی مقدار ہوگی۔

یکساں نہ ہونے کی حالت میں زاویئی رفتار کے اندازے کا طریقہ یہ ہے۔ اگر ایک خاص آن میں زاویئی رفتار دریافت کرنا مطلوب ہے تو یہ فرض کرو کہ آن مذکور کے بعد وقت کی ایک اکائی تک رفتار وہی رہتی ہے جو آن مذکور پر تھی۔اس طرح وقت کی ایک اکائی میں جو زاویہ و ط کی گردش سے پیدا ہو وہ مطلوبہ زاویئی رفتار ہے۔

مثالیں۔ اگر ایک سیکنڈ میں خط و ط چار قائموں

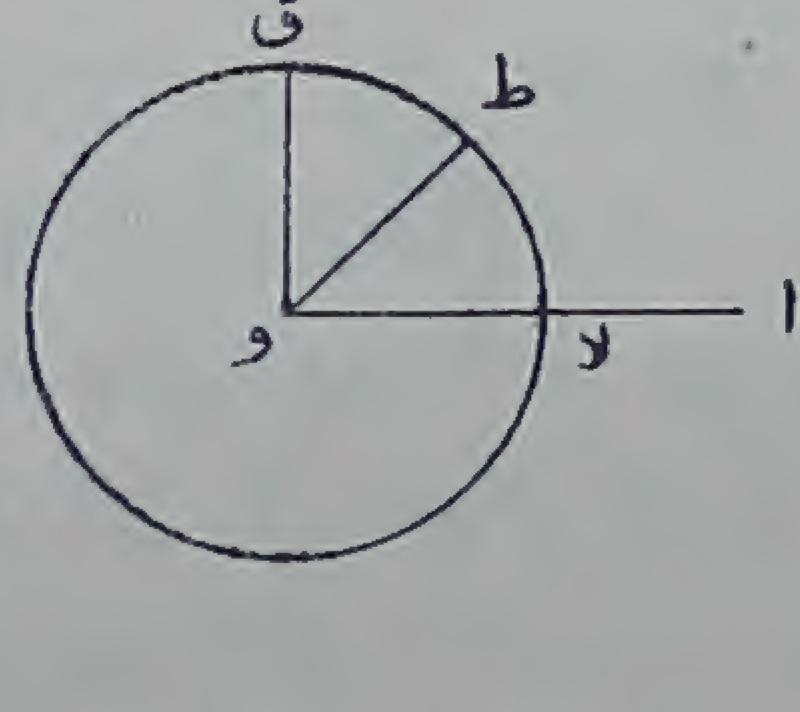
یعنی ۲π نیم قطریوں میں گھوم جائے تو زاویئی رفتار ۲π ہوگی۔

اگر ایک سیکنڈ میں خط و ط کی گردش سے ایک قائمے کی تین چوتھائی پیدا ہو تو زاویئی رفتار $\frac{3}{4} \times \frac{\pi}{2}$ یعنی $\frac{3\pi}{8}$ ہوگی۔

اگر خط و ط ایک سیکنڈ میں سات گردشیں کرے تو زاویئی رفتار ۷ × ۲π یعنی ۱۴π ہوگی۔

(۲۶) اگر متحرک نقطے کا راستہ معلوم ہو تو زاویئی رفتار ہمیشہ خطی رفتار کی شکل میں تحویل ہو سکتی ہے۔ ہم صرف اس صورت پر بحث کریں گے جب ایک نقطہ ایک دائرے کے محیط پر حرکت کر رہا ہو اور اس کی زاویئی رفتار یکساں ہو۔

اگر ایک نقطہ ایک دائرے کے محیط پر یکساں چال سے چل رہا ہو تو اس کی زاویئی رفتار دائرے کے مرکز کے گرد اس کی چال کو نصف قطر دائرہ پر تقسیم کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔



فرض کرو کہ متحرک نقطہ وقت کی ایک آن میں ط پر تھا اور وقت کی ایک اکائی میں اس نے قوس ط ق طے کی۔ تو خط وط کی گردش سے زاویہ ط و ق پیدا ہوا۔ اس لئے ط و ق میں جو تعداد نیم قطریوں کی ہے وہ زاویئی رفتار ہے۔

لیکن زاویہ ط و ق میں نیم قطریوں کی تعداد = $\frac{\text{قوس ط ق}}{\text{و ط}}$

نیز چونکہ قوس ط ق وقت کی ایک اکائی میں طے ہوی اس لئے یہ چال کے برابر ہے۔

پس اگر چال کو چ سے تعبیر کریں اور نصف قطر کو ن سے اور زاویئی رفتار کو ں سے۔

تو ں = $\frac{\text{چ}}{\text{ن}}$

یعنی چ = ں ن

مثالیں۔ (۱) اگر متحرک نقطہ ایک ۳ فٹ نصف قطر والے دائرے کے محیط پر زاویئی رفتار کی اکائی سے حرکت کرے تو چال = ۳ × ۱ = ۳ فٹ فی ثانیہ۔

(۲) ایک متحرک نقطہ ایک ۵ فٹ نصف قطر والے دائرے کے محیط پر ۸ فٹ فی سیکنڈ کی چال سے چلے تو اس کی زاویئی رفتار ں = $\frac{۸}{۵}$ نیم قطری فی ثانیہ۔

(۳) زمین اپنے محور کے گرد ۲۴ گھنٹے میں ایک پوری گردش کرتی ہے تو اس کی سطح کے کسی نقطہ کی زاویئی رفتار

= $\frac{\text{۲ π}}{\text{۲۴ × ۶۰ × ۶۰}}$ نیم قطری فی ثانیہ

چونکہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے اس لئے خط استوا کے کسی نقطہ کی چال

$$= \frac{\pi ۲}{۶۰ \times ۶۰ \times ۲۴} \times ۴۰۰۰$$ میل فی ثانیہ۔

= ۱۰۴۷ میل فی گھنٹہ

امثلہ نمبری (۳)

(۱) ایک پہیہ اپنے مرکز کے گرد گھوم کر فی منٹ ۲۰۰ گردشیں کرتا ہے اس کے محیط کے کسی نقطے کی زاویئی رفتار مرکز کے گرد دریافت کرو۔

(۲) ایک پہیہ اپنے مرکز کے گرد گھومتا ہے اور فی سیکنڈ چار چکر کرتا ہے۔محیط کے کسی نقطے کی زاویئی رفتار مرکز کے گرد دریافت کرو اور اگر پہیے کا نصف قطر ۲ فٹ ہو تو کسی نقطے کی خطی رفتار کیا ہوگی؟

(۳) اگر ایک کلاک کی منٹ کی سوئی ۶ فٹ لمبی ہو تو سوئی کے سرے کی چال فی سیکنڈ کتنے فٹ ہوگی؟ اس کی رفتار بھی معلوم کرو۔

(۴) ایک گھڑی میں گھنٹہ، منٹ، اور سیکنڈ کی تینوں سوئیاں ہیں ان کے طول بالترتیب ۸۴ء، ۱۸ء، اور ۲۴ء۲ انچ ہیں۔ان کے سروں کی چالوں کا مقابلہ کرو۔

(۵) ایک پاؤں چکی کا محور افقی ہے اور قطر ۴۰ فٹ ہے

اور وہ ۴۰ سیکنڈ میں ایک گردش کرتی ہے۔ اگر اس کو چلانے والا ایک آدمی زمین سے ایک ہی بلندی پر رہے تو دریافت کرو کہ وہ اس کی سطح پر کس چال سے چل رہا ہے؟

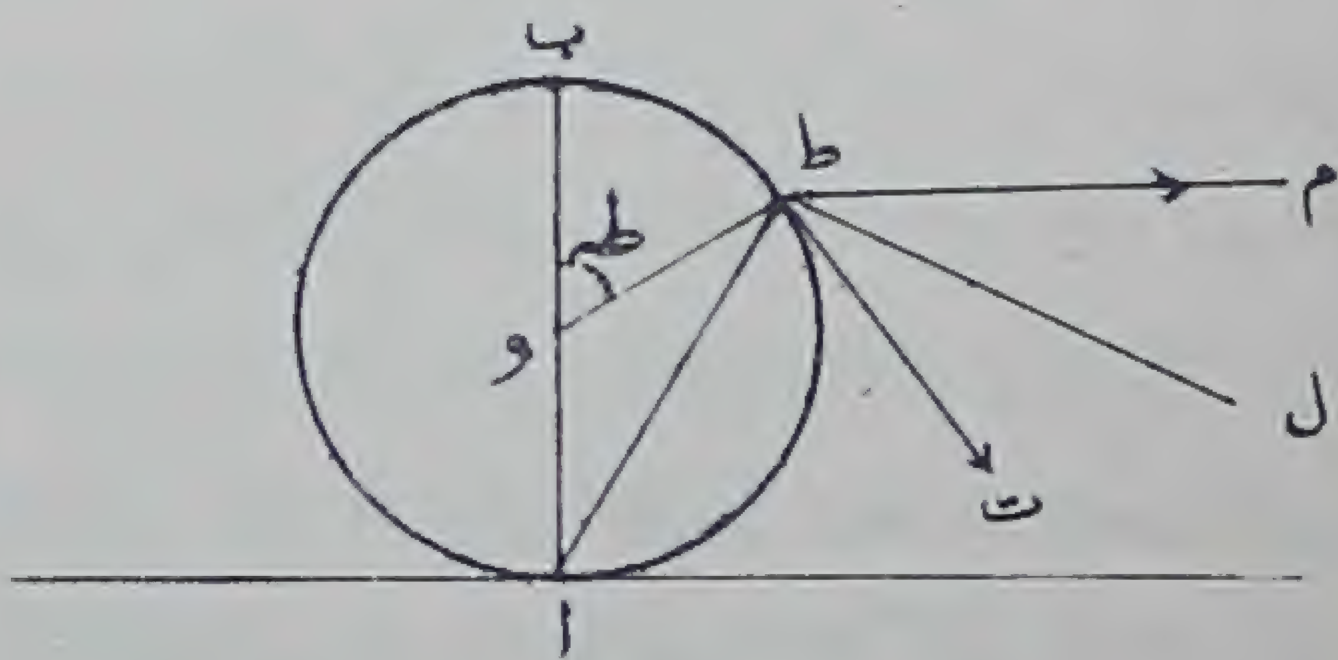
(۶) ایک ریل گاڑی رفتار س سے چل رہی ہے۔ ریل کی سڑک کے متوازی فاصلہ ف پر ایک اور سڑک ہے جس پر ایک گھوڑا گاڑی جارہی ہے ریل کی سڑک سے فاصلہ ق پر ایک درخت ہے۔ ریل کے ایک مسافر کو ایسا معلوم ہوتا ہے کہ گھوڑا گاڑی اور درخت ایک ہی خط مستقیم میں رہتے ہیں۔ گھوڑا گاڑی کی رفتار دریافت کرو۔

(۷) ایک نقطہ یکساں چال سے ایک دائرے کے محیط پر چل رہا ہے۔ ثابت کرو کہ محیط کے کسی نقطہ کے گرد اس کی زاویئی رفتار ایک مقدار مستقل ہے۔

(۸) ایک رسی کا ایک سرا ایک مربع کے ایک کونے سے بندھا ہے مربع ایک افقی میز پر نصب کیا گیا ہے رسی کے دوسرے سرے پر ایک ذرہ بندھا ہے اور رسی کو مربع کے گرد لپیٹ دیا گیا ہے۔ مربع کا ایک ضلع م ہے اور رسی کا طول ۴ م ہے۔ ذرے کو رفتار س سے مربع کے ضلع کی عمودی سمت میں حرکت دی گئی ہے یہ فرض کر کے کہ ذرے کی چال یکساں رہتی ہے دریافت کرو کہ تمام رسی کتنے وقت میں مربع پر سے اتر آئے گی؟

(۹) ایک پہیہ یکساں رفتار سے زمین پر بغیر پھسلے گردش کرتا ہوا چلتا ہے

اس کا مرکز ایک خط مستقیم میں حرکت کرتا ہے۔ پہیے کے محیط کے
مختلف نقاط کی رفتاریں دریافت کرو۔
فرض کرو کہ پہیے کا مرکز و ہے اور نصف قطر ن ہے اور
فرض کرو کہ مرکز کی رفتار س ہے فرض کرو کہ کسی آن میں
پہیے کا نقطہ ا زمین سے مس کرتا ہے۔



چونکہ پہیہ اپنے مرکز کے گرد یکساں گھوم رہا ہے اور ساتھ ہی
ساتھ مرکز ایک خط مستقیم میں آگے بڑھ رہا ہے نیز چونکہ
پہیے کے محیط کے تمام نقطے یکے بعد دیگرے زمین سے
مس کرتے ہیں اس لئے یہ ظاہر ہے کہ جتنے وقت میں
مرکز پہیے کے محیط کے برابر فاصلہ طے کرتا ہے اتنے وقت
میں محیط کا ہر ایک نقطہ مرکز کے گرد پوری گردش کرتا ہے
لہذا مرکز کی رفتار س مقدار میں وہی ہے جو محیط کے
کسی نقطے کی رفتار بہ لحاظ مرکز کے ہے۔ اس لئے پہیے کے
کسی نقطہ ط کی دو رفتاریں ہیں جن میں سے ہر ایک کی

مقدار س ہے اور ایک کی سمت ط م مرکز کے حرکت کے متوازی ہے اور دوسری کی سمت وہ ہے جو ط پر کے مماس ط ت کی ہے۔

پس ا کی رفتار = ر - ر = ۰

یعنی ایک آن میں نقطہ ا ساکن رہتا ہے۔

اسی طرح ب کی رفتار = ر + ر = ۲ ر

اب کسی اور نقطہ ط کی رفتار پر غور کرو اس کی دو مساوی رفتاریں ر اور ر بالترتیب ط م اور ط ت کی سمتوں میں ہیں۔

چونکہ ط م اور ط ت بالترتیب و ب اور و ط پر عمود ہیں

زاویہ م ط ت = زاویہ ط و ب = ط (فرض کرو)

ان دو رفتاروں س اور س کا حاصل ایک رفتار $\text{۲ س جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲}}$ کے مساوی ط ل کی سمت میں ہے جہاں

زاویہ ل ط ت = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}}$ زاویہ م ط ت = $\frac{\text{ط}}{\text{۲}}$ = زاویہ و ط ا

پس زاویہ ا ط ل = زاویہ و ط ت = ایک قائمہ

یعنی ط کی حرکت کی سمت ا ط پر عمود ہے اور اس کی زاویئی رفتار ا کے گرد

$$= \frac{\text{۲ ر جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲}}}{\text{ا ط}} = \frac{\text{۲ ر جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲}}}{\text{۲ ن جم}\,\frac{\text{ط}}{\text{۲}}} = \frac{\text{ر}}{\text{ن}}$$

= محیط کے کسی نقطہ کی زاویئی رفتار گرد مرکز کے

پس پہیے کا زمین کے ساتھ جو نقطہ تماس ہے اس کے گرد پہیے کا ہر ایک نقطہ ایک مستقل زاویئی رفتار سے حرکت کر رہا ہے جو مرکز کی رفتار کو پہیے کے نصف قطر پر تقسیم

کرنے سے حاصل ہوتی ہے۔

(۱۰) ایک انجن ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے اس کے پہیے کا قطر ۴ فٹ ہے۔ ۳ فٹ کی بلندی پر پہیے کے جو دو نقطے ہیں ان کی رفتار اور سمت حرکت دریافت کرو۔

(۱۱) اگر ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہو اور اس کے پہیے کا قطر ۳ فٹ ہو تو نہ پھسلنے کی حالت میں پہیے کی زاویئی رفتار دریافت کرو۔

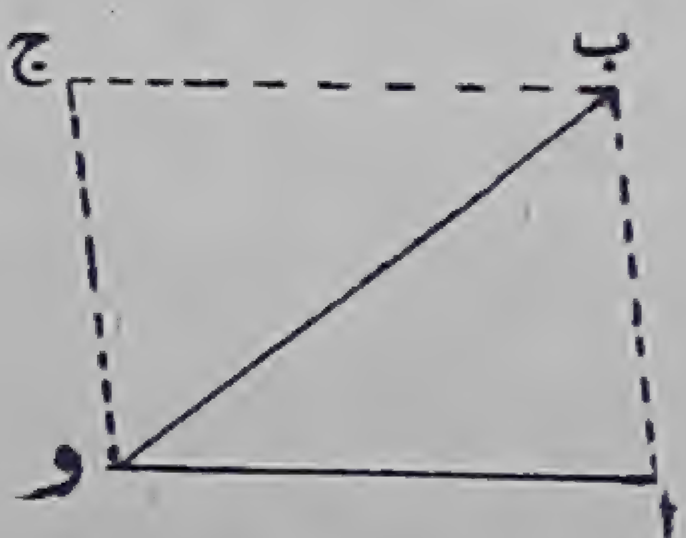
(۱۲) ایک ریل گاڑی کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ ہے اور اس کے پہیے کا نصف قطر ۲ فٹ ہے۔ اگر حرکت بغیر پھسلنے کے ہو تو پہیے کی زاویئی رفتار دریافت کرو۔ اور پہیے کے سب سے اونچے نقطے کی اضافی رفتار بہ لحاظ مرکز معلوم کرو۔

(۱۳) ایک گاڑی کے پہیے کا نصف قطر ۲ فٹ ہے اور گاڑی ۱۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے چل رہی ہے۔ اگر حرکت بغیر پھسلنے کے ہو تو پہیے کے بلند ترین نقطے کی رفتار معلوم کرو اور ان نقطوں کی رفتاریں بھی دریافت کرو جو زمین سے بالترتیب ایک اور تین فٹ کی بلندیوں پر ہیں۔

باب دوم

اسراع

(۲۷) تبدل رفتار۔فرض کرو کہ ایک آن میں ایک نقطے کی رفتار و ا سے تعبیر ہوتی ہے اور کچھ وقت گزرنے کے بعد اس کی رفتار و ب سے تعبیر ہوتی ہے۔ا ب کو ملاؤ اور متوازی الاضلاع و ا ب ج کی تکمیل کرو تب دونوں رفتاریں و ا اور و ج مل کر رفتار و ب کے مساوی ہیں اس لئے اگر رفتار و ا کے ساتھ رفتار و ج کو ترکیب کیا جائے تو رفتار و ب حاصل ہوگی۔پس دئے ہوئے وقت میں جو تبدل رفتار میں واقع ہوا وہ و ج سے تعبیر ہوتا ہے۔



بالعموم رفتار کا تبدل پہلی اور دوسری رفتاروں کی مقداروں کا فرق نہیں ہوتا۔بلکہ یہ تبدل وہ رفتار ہوتی ہے جسے پہلی

رفتار کے ساتھ ترکیب کرنے سے دوسری رفتار حاصل ہو۔ رفتار کی تبدیلی مستقل نہیں ہو سکتی جب تک کہ مقدار اور سمت دونو مستقل نہ ہوں۔

امثلہ نمبری (۴)

(۱) ایک نقطہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چل رہا ہے۔ اس کے بعد کسی ایک آن میں اس کی رفتار کی مقدار تو وہی ہے لیکن سمت پہلی سمت سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے تبدل رفتار دریافت کرو۔

حسب دفعہ گزشتہ شکل بناؤ۔ صورت ہذا میں وا = وب = ۱۰ اور زاویہ

اوب = ۳۰°

چونکہ وا = وب اس لئے زاویہ واب = ۷۵°

پس زاویہ اوج = ۱۰۵°

نیز اب = ۲ واجب ۱۵° = ۲۰ × $\frac{\sqrt{۳} - ۱}{۲\sqrt{۲}}$

$= ۵(\sqrt{۶} - \sqrt{۲}) = ۵٫۱۷۶$

اس لئے تبدل رفتار یعنی وج، ۵٫۱۷۶ فٹ فی ثانیہ ہے اور اس کا میلان رفتار کی پہلی سمت سے ۱۰۵° ہے۔

(۲) ایک جہاز کی رفتار پہلے ۳ میل فی گھنٹہ مشرق کی جانب ہے پھر کچھ عرصہ کے بعد ۴ میل فی گھنٹہ شمال کی طرف ہے۔ تبدیل رفتار دریافت کرو۔

(۳) ایک نقطے کی رفتار ۵ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ کچھ عرصہ کے بعد اس کی رفتار کی مقدار تو وہی ہے لیکن سمت پہلی سمت سے °۶۰ کا زاویہ بناتی ہے۔ تبدل رفتار دریافت کرو۔

(۴) ایک نقطہ بہ جانب شرق ۲۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے ایک گھنٹہ کے بعد شمال مشرق کی طرف اپنی پہلی چال سے حرکت کرتا ہے۔ تبدل رفتار معلوم کرو۔

(۵) ایک نقطہ یکساں چال سے ایک ۷ گز نصف قطر والے دائرے کے محیط پر ۱۱ سیکنڈ میں گردش کرتا ہے۔ اگر وہ ایک قطر کے ایک سرے سے چلے تو محیط کا چھٹا حصہ طے کرنے کے بعد اس کی رفتار کا تبدل دریافت کرو۔

(۲۸) **اسراع۔ تعریف۔** ایک متحرک نقطے کی تبدل رفتار کی شرح اسراع کہلاتی ہے۔ یہ یاد رہے کہ اسراع کی مقدار بھی ہوتی ہے اور سمت بھی۔ اسراع اس وقت یکساں ہوتا ہے جب مساوی اوقات میں رفتار کے تبدل مساوی ہوں خواہ اوقات کی مقدار کتنی ہی کم ہو۔

یکساں ہونے کی حالت میں اسراع کا اندازہ وہ تبدل رفتار ہے جو وقت کی ایک اکائی میں ظہور پذیر ہو۔ تبدل ہونے کی حالت میں اگر ایک خاص آن میں اسراع کا اندازہ لگانا مقصود ہو تو یہ فرض کرو کہ وقت کی ایک اکائی میں اسراع وہی رہتا ہے جو آن مذکور میں تھا۔ اس مفروضے سے

وقت کی ایک اکائی میں جو رفتار کی تبدیلی ہوگی وہ اسراع مطلوب ہے۔

(۲۹) مقدار میں اسراع کی اکائی ایک ایسے متحرک نقطے کا اسراع ہے جس کی رفتار کی تبدیلی وقت کی ایک اکائی میں رفتار کی ایک اکائی ہو۔

پس جس نقطے کی رفتار کی تبدیلی وقت کی ایک اکائی میں رفتار کی ن اکائیوں پر مشتمل ہو تو وہ اسراع کی ن اکائیوں سے حرکت کر رہا ہوگا۔

مثلاً۔ اگر ایک نقطے کے اسراع میں ۱۰ "سینٹی میٹر سیکنڈ" والی اکائیاں ہوں تو اس کی رفتار کی تبدیلی ایک سیکنڈ میں ۱۰ سینٹی میٹر فی سیکنڈ ہوگی بعض اوقات ایسے اسراع کو $\frac{\text{۱۰ سینٹی میٹر}}{\text{سیکنڈ}^2}$ کا اسراع کہتے ہیں۔

(۳۰) **مسئلہ۔ اسراعوں کا متوازی الاضلاع**۔ اگر ایک وقت میں ایک متحرک ذرے کے دو اسراع ہوں جو مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو ضلعوں سے تعبیر ہوں جو ایک نقطے سے کھینچے جائیں تو دونو اسراع مل کر ایک ایسے اسراع کے مساوی ہوں گے جو اس نقطے میں سے گزرنے والے قطرِ متوازی الاضلاع سے تعبیر ہوگا۔

فرض کرو کہ متوازی الاضلاع ا ب د ج کے اضلاع ا ب اور ا ج دونوں اسراعوں کو تعبیر کرتے ہیں یعنی ا ب اور ا ج ان رفتاروں کو تعبیر کرتے ہیں جو وقت کی ایک اکائی میں

نقطے کی رفتار پر اضافے ہوتے ہیں۔ فرض کرو کہ اسی پیمانے پر ع ف نقطے کی رفتار کو اس آن میں تعبیر کرتا ہے جب دونو مذکورہ اسراع شروع ہوئے۔



ع ف پر ایک متوازی الاضلاع ع ک ف ل بناؤ جس کے ضلعے اب اور اج کے متوازی ہوں۔ ع ک کو م تک اور ع ل کو ن تک خارج کرو تاکہ ک م اور ل ن بالترتیب اب اور اج کے مساوی ہوں حسب شکل بالا متوازی الاضلاعوں کی تکمیل کرو۔

تب رفتار ع ف دو رفتاروں ع ک اور ع ل کے برابر ہے لیکن وقت کی ایک اکائی میں رفتار کی تبدیلیاں ک م اور ل ن ہیں۔ اس لئے وقت کی ایک اکائی کے اخیر میں انہی سمتوں میں رفتاریں ع م اور ع ن ہوں گی۔ جو ع و کے برابر ہیں اور رفتار ع و دو رفتاروں ع ف اور ف و کے برابر ہے (دفعہ ۱۶) پس وقت کی ایک اکائی میں متحرک نقطے کی رفتار کا تبدل ف و ہے۔ یعنی ف و

حاصل اسراع ہے لیکن ف و، ا د کے مساوی اور متوازی ہے۔ اس لئے اسراع ا د، دو اسراعوں ا ب اور ا ج کے برابر ہے یعنی اسراعوں ا ب اور ا ج کا حاصل ا د ہے۔

(۳۱) پچھلی دفعہ سے یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اسراعوں کی ترکیب و تحلیل اسی طرح ہوتی ہے جس طرح رفتاروں کی اور یہ بھی ظاہر ہے کہ اگر دفعات ۱۳ تا ۱۹ میں لفظ رفتار کی جگہ لفظ اسراع درج کیا جائے تو سب مسائل اس صورت میں بھی صحیح ہوں گے۔

رفتاریں اور اسراع اور نیز قوتیں مقادیر طبیعی کی ایک اہم قسم کی مثالیں ہیں جن کو سمتی کہتے ہیں۔ جیسا کہ ان کے نام سے ظاہر ہے ان مقادیر کی سمت بھی ہوتی ہے اور مقدار بھی۔ اس لئے ہر مقدار سمتی کی موزوں تعبیر ایک خط مستقیم سے ہوتی ہے۔ تمام صورتوں میں مقادیر سمتی کی ترکیب بہ موجب قانون متوازی الاضلاع ہوتی ہے۔

دفعات ۱۲ اور ۳۰ مقادیر سمتی کی جمع کی مثالیں ہیں اصطلاحاً یہ کہا جاتا ہے کہ سمتی ا ب اور ب د یا ا ج کے جمع کرنے سے سمتی مقدار ا د حاصل ہوتی ہے۔

جن مقادیر کی سمت نہیں ہوتی بلکہ محض مقدار ہی ہوتی ہے ان کو میزانی کہتے ہیں۔ توانائی بالفعل جس کا بیان آگے آئیگا میزانی کی مثال ہے میزانی مقادیر کی اور مثالیں یہ ہیں۔ ایک ٹن کوئلہ دس روپئے وغیرہ۔ میزانی مقادیر کی

ترکیب جمع مفرد سے ہوتی ہے۔

(۳۲) ایک نقطہ ایک خط مستقیم میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کی ابتدائی رفتار ب ہے اور اس کا اسراع اس کی سمت حرکت میں ایک مقدار مستقل ع ہے اگر وقت و کے اختتام پر اس کی رفتار س ہو اور نقطہ ابتداء حرکت سے طے کردہ فاصلہ ف ہو تو

(۱) س = ب + ع و

(۲) ف = ب و + ½ ع و²

(۳) س² = ب² + ۲ ع ف

(۱) چونکہ ع اسراع کو تعبیر کرتا ہے اسلئے وقت کی اکائی میں رفتار کی تبدیلی ع ہوگی لہذا وقت کی و اکائیوں میں رفتار کی تبدیلی ع و ہوگی۔

لیکن چونکہ ابتداءً نقطہ رفتار کی ب اکائیاں رکھتا تھا۔ پس وقت و کے اختتام پر اس کی رفتار میں (ب + ع و) اکائیاں ہوں گی۔

یعنی س = ب + ع و

(۲) فرض کروکہ مدت و کے عین درمیان میں رفتار سَ ہے تو بذریعہ (۱) سَ = ب + ع و/۲ اب مدت و میں دو آن ایسی لو جن میں سے ایک تو مدت مذکورہ کے درمیان سے بقدر ق پہلے ہو اور دوسری آن مدت مذکورہ کے درمیان سے بقدر ق پیچھے ہو۔ تو پہلی آن میں جو رفتار

ہوگی وہ رفتار س سے اسی قدر کم ہوگی جس قدر کہ دوسری آن کی رفتار س سے زیادہ ہوگی کیونکہ مدت و کے دوران میں رفتار کی تبدیلی یکساں ہے۔

چونکہ مدت و آنوں کے ایسے جوڑوں میں تقسیم ہوسکتی ہے اس لئے طے کردہ فاصلہ وہی ہوگا جو وقت و میں یکساں رفتار س سے طے ہو۔

$$\therefore \text{ف} = \text{س}\,\text{و} = \left(\text{ب} + \text{ع}\frac{\text{و}}{۲}\right)\text{و} = \text{ب}\,\text{و} + \frac{۱}{۲}\text{ع}\,\text{و}^{۲}$$

(۳) اگر ہم (۱) اور (۲) سے و کو ساقط کریں تو (۳) حاصل ہوگی کیونکہ (۱) سے

$$\text{ر}^{۲} = (\text{ب} + \text{ع}\,\text{و})^{۲}$$

$$= \text{ب}^{۲} + ۲\,\text{ع}\,\text{و}\,\text{ب} + \text{ع}^{۲}\,\text{و}^{۲}$$

$$= \text{ب}^{۲} + ۲\,\text{ع}\left(\text{ب}\,\text{و} + \frac{۱}{۲}\text{ع}\,\text{و}^{۲}\right)$$

$$= \text{ب}^{۲} + ۲\,\text{ع}\,\text{ف} \qquad \text{بذریعہ (۲)}$$

$$\text{یعنی}\quad \text{ر}^{۲} = \text{ب}^{۲} + ۲\,\text{ع}\,\text{ف}$$

(۳۳) مساوات (۲) کا دوسرا ثبوت۔ مدت و کو مساوی اوقات میں تقسیم کرو جن میں سے ہر ایک کی مدت ی ہو اس لئے و = ن ی ان مدتوں کے آغاز میں نقطے کی رفتاریں بالترتیب یہ ہونگی۔

$$\text{ب}،\ \text{ب}+\text{ع}\,\text{ی}،\ \text{ب}+۲\text{ع}\,\text{ی}،\ \text{ب}+۳\text{ع}\,\text{ی}،\ \ldots،\ \text{ب}+(\text{ن}-۱)\,\text{ع}\,\text{ی}$$

اگر ہر ایک مدت ی کے دوران میں نقطہ اس رفتار سے حرکت کرے جو اس مدت کے شروع میں اس کی رفتار

ہے تو کل فاصلہ ف$_1$ جو اس طرح طے ہوگا وہ

= ب ی + [ب + ع ی] ی + ... + [ب + (ن - ۱) ع ی] ی

یعنی ف$_1$ = ن ب ی + ع ی^2 {۱ + ۲ + ۳ + ... (ن - ۱)}

= ن ب ی + ع ی^2 ن(ن - ۱)/۲ سلسلہ حسابیہ جمع کرنے سے

= ب و + ½ ع و^2 (۱ - ۱/ن)، کیونکہ ی = و/ن

نیز ان مدتوں کے اختتاموں پر نقطے کی رفتاریں بالترتیب یہ ہوں گی۔

ب + ع ی، ب + ۲ ع ی، ......، ب + ن ع

اب اگر ہر ایک مدت ی کے دوران میں نقطہ ایسی رفتار سے حرکت کرے جو اس مدت کے آخر میں اسکی رفتار ہے تو کل فاصلہ ف$_2$ جو اس طرح طے ہوگا وہ

= (ب + ع ی) ی + (ب + ۲ ع ی) ی + ... + (ب + ن ع ی) ی

یعنی ف$_2$ = ن ب ع + ب ی^2 (۱ + ۲ + ۳ + ... + ن)

= ب و + ½ ع و^2 (۱ + ۱/ن) پہلے کی طرح

اصلی فاصلہ ف، ف$_1$ اور ف$_2$ کے درمیان ہے اور جتنا ہم ن کو بڑھاتے جائیں یعنی جتنا ہم مدت ی کو چھوٹا کرتے جائیں اتنا ہی فاصلوں ف$_1$ اور ف$_2$ کا فرق کم ہوتا جائیگا اگر ہم ن کو لا انتہا بڑھائیں تو ف$_1$ اور ف$_2$ میں سے ہر ایک کی قیمت یہہ ہو جائے گی

ب و + $\frac{1}{2}$ ع و^2

پس ف = ب و + $\frac{1}{2}$ ع و^2

(۳۴) جب متحرک نقطہ حالت سکون سے چلتا ہے تو ب = ۰، پس دفعہ ۳۲ کے ضابطوں کی یہ سادہ صورت ہو جائے گی۔

ر = ع و

ف = $\frac{1}{2}$ ع و^2

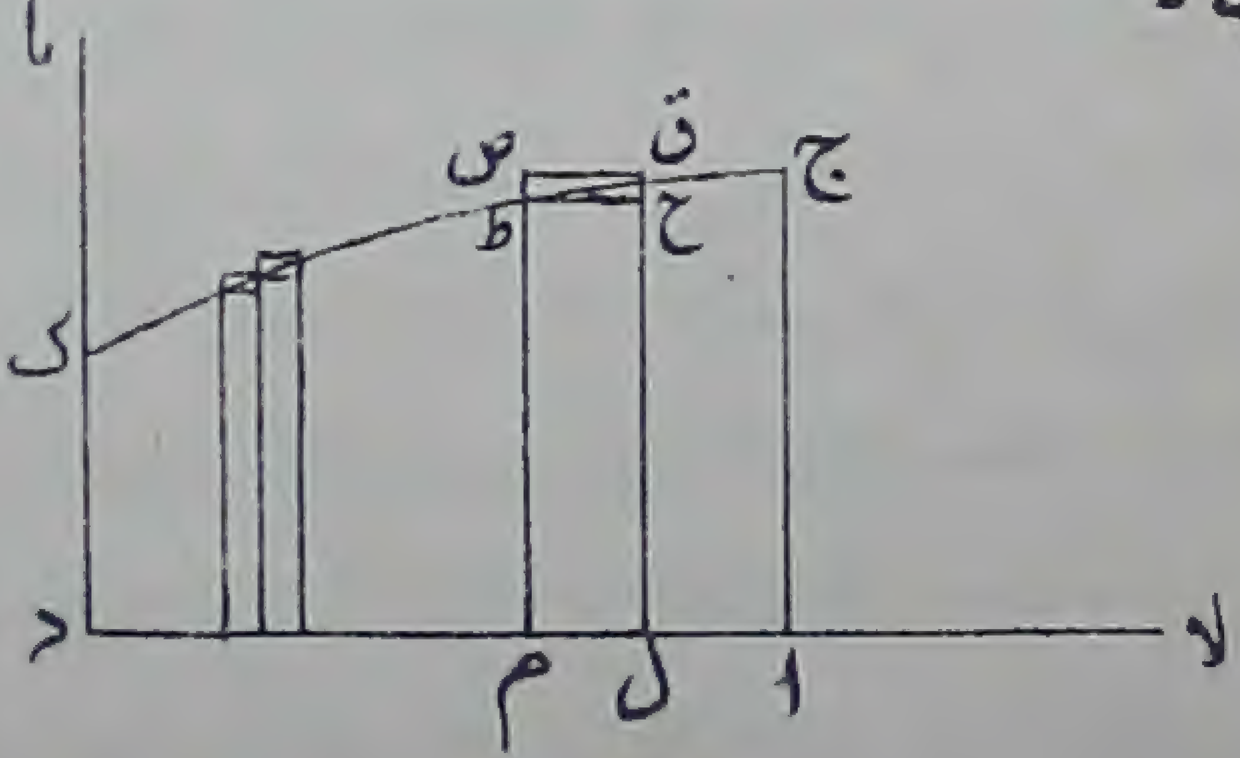
ر^2 = ۲ ع ف

(۳۵) ترسیمی طریقہ۔ رفتار اور وقت کا منحنی۔

اگر متحرک نقطے کی رفتار بدل رہی ہو تو ایک مفروض وقت میں طے کردہ فاصلہ ترسیماً معلوم کرو۔

دو خطوط د لا اور د ما متقاطع علی القوائم لو اور فرض کرو کہ د لا کی سمت میں جو طول ناپے جائیں وہ وقت کو تعبیر کرتے ہیں۔

یعنی اس سمت میں طول کی اکائی وقت کی ایک اکائی کو تعبیر کرتی ہے۔



م جیسے ہر ایک نقطے پر عمود م ط ایسا نکالو جو وقت ڈ م پر رفتار کو تعبیر کرے تو م ط جیسے تمام معینون کے سرے ایک خط مثلاً ک ط ق جہ پر واقع ہوں گے جو منحنی ہوگا یا مستقیم۔

ہم یہ ثابت کریں گے کہ وقت ڈ ا میں طے شدہ فاصلہ اس رقبے کے برابر ہے جو خطوط ڈ ک، ڈ ا، ا ج، ک ج سے محدود ہے۔

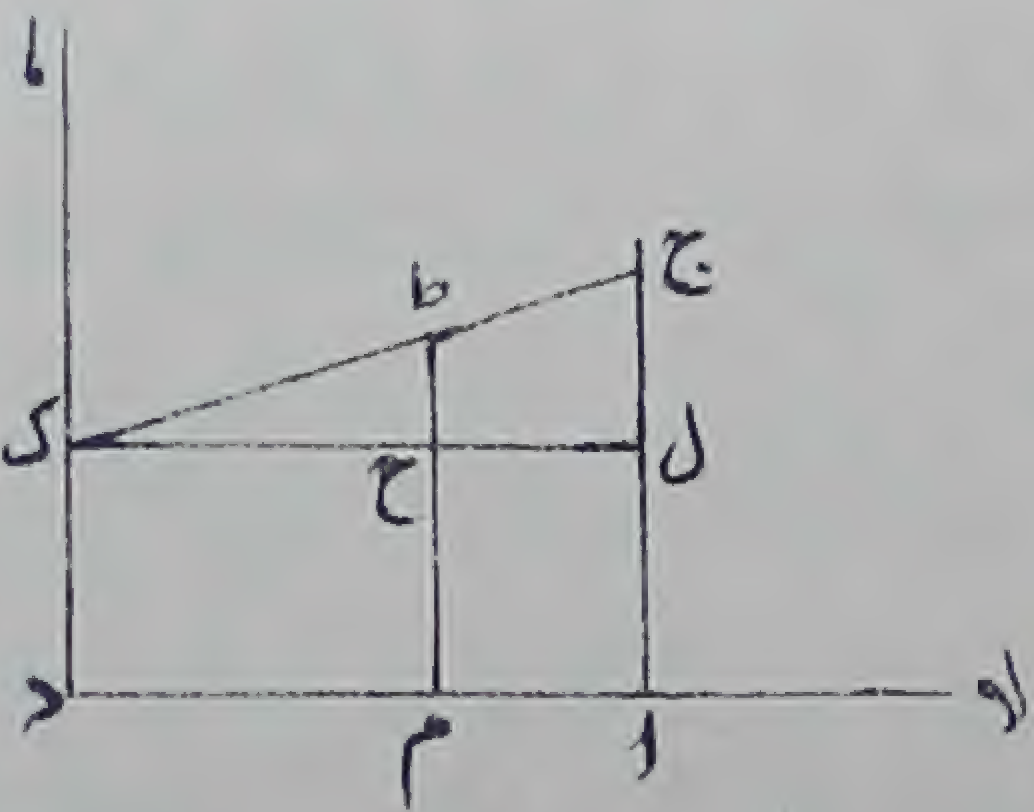
م ط کے قریب ایک معین ل ق لو، تو وقت م ل کے دوران میں نقطہ ایسی رفتار سے حرکت کرتا ہے جو م ط سے زیادہ ہے اور ل ق سے کم ہے پس وقت م ل میں نقطے کاطے کردہ فاصلہ م ط × م ل سے زیادہ ہے اور ل ق × م ل سے کم ہے یعنی وقت م ل میں طے کردہ فاصلہ کی اکائیوں کی تعداد مستطیل ط ل کے رقبے کی اکائیوں سے زیادہ ہے اور مستطیل ق م کے رقبے کی اکائیوں سے کم ہے اسی طرح ڈ ا کو چھوٹے چھوٹے مساوی حصوں میں تقسیم کرکے یہی عمل کرو۔

اس عمل سے ثابت ہوگا کہ وقت ڈ ا میں طے شدہ فاصلہ اندرونی مستطیلوں کے مجموعہ سے زیادہ ہے اور بیرونی مستطیلوں کے مجموعہ سے کم ہے۔

اب وقت ڈ ا کے حصص کی تعداد کو لاانتہا بڑھاؤ تو اندرونی

مستطیلوں کا مجموعہ اور بیرونی مستطیلوں کا مجموعہ آپس میں برابر ہو جائے گا اور ان میں سے ہر ایک منحنی کے رقبے کے مساوی ہو جائے گا یعنی وقت د ا میں طے شدہ فاصلے کی اکائیوں کی تعداد بالآخر رقبہ د ا ج ک کی اکائیوں کی تعداد کے مساوی ہوگی۔

(۳۶) یکساں اسراع کی صورت۔ یہ فرض کرو کہ ب ابتدائی رفتار ہے۔ اور ع یکساں اسراع ہے۔



د ما پر د ک ایسا قطع کرو کہ ابتدائی رفتار ب کو وقت صفر پر تعبیر کرے۔ چونکہ کسی وقت ف پر رفتار

= ب + ق × ع

اسلئے نقطہ م پر معین م ط = د ک + ع × د م ......(۱)

ک میں سے ک ح ل متوازی د لا کا کھینچو تاکہ ط م کو ح پر اور ا ج کو ل پر ملے۔

تب ح ط = م ط - د ک = ع × د م بذریعہ (۱)

یعنی $ع = \frac{ح ط}{د م} = \frac{ح ط}{ک ح} =$ مس ط ک ح

پس زاویہ ط ک ح غیر متبدل ہے۔ یعنی ط ایک ایسے خط مستقیم پر واقع ہے جو ک میں سے گزرتا ہے اسلئے صورت ہذا میں رفتار اور وقت کا منحنی خط مستقیم ک ج ہے

اور ل ج = ک ل × مس ج ک ل = ع × و

لہذا وقت و میں طے شدہ فاصلہ کی اکائیوں کی تعداد د ا ج ک کے رقبے کی اکائیوں کی تعداد کے مساوی ہو گی۔

اور یہ رقبہ = رقبہ د ک ل ا + رقبہ ک ل ج

$= د ا \times د ک + \frac{1}{2}$ ک ل × ل ج

$= د ا \left[د ک + \frac{1}{2} ل ج \right] = و \left[ب + \frac{1}{2} ع و \right]$

$= ب و + \frac{1}{2} ع و^2$

(۳۷) دفعہ ۳۵ کی شکل میں چونکہ وقت م ل میں رفتار کی زیادتی ح ق ہے تو اس آن میں متحرک نقطے کا اسراع $\frac{ح ق}{م ل}$ کی انتہائی قیمت ہو گی جب م ل کو بے انتہا چھوٹا کیا جائے۔

اور $\frac{ح ق}{م ل} =$ مس ق ط ح

لیکن جب م ل کو بے انتہا چھوٹا کیا جائے تب نقطہ ق نقطہ ط کے بالکل متصل ہو جائے گا اور اس وقت ط ق، نقطہ ط پر منحنی کا مماس ہو جاتا ہے۔ اور جو زاویہ نقطہ ط پر کا مماس خط د لا سے بناتا ہے اس زاویہ کا مماس س ق ط ح ہو گا

پس رفتار اور وقت کے منحنی میں خط وقت سے جو منحنی کا میلان ہوگا اس میلان کا مماس اسراع کی عددی قیمت ہو گی۔

(۳۸) کسی خاص ثانیہ کے دوران میں طے شدہ فاصلہ

[طالب علم کو یاد رکھنا چاہیئے کہ دفعہ (۳۲) کے ضابطہ (۲) سے وہ فاصلہ حاصل نہیں ہوتا جو و ویں ثانیہ میں طے ہوا بلکہ وہ فاصلہ جو و ثانیوں میں طے ہوا]

و ویں ثانیہ میں طے شدہ فاصلہ = و ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ - (و - ۱) ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ

$$= \left[\text{ب و} + \tfrac{1}{2}\,\text{ع و}^2\right] - \left[\text{ب}(\text{و}-1) + \tfrac{1}{2}\,\text{ع}(\text{و}-1)^2\right]$$

$$= \text{ب} + \tfrac{1}{2}\,\text{ع}\left[\text{و}^2 - (\text{و}-1)^2\right]$$

$$= \text{ب} + \text{ع}\,\frac{2\text{و}-1}{2}$$

پس حرکت کے پہلے، دوسرے، تیسرے، ..... ن ویں ثانیہ میں طے شدہ فاصلے بالترتیب یہ ہوں گے

$$\text{ب} + \tfrac{1}{2}\,\text{ع}،\ \text{ب} + \tfrac{3}{2}\,\text{ع}،\ \text{ب} + \tfrac{5}{2}\,\text{ع}،\ \ldots\ldots،\ \text{ب} + \frac{2\text{ن}-1}{2}\,\text{ع}$$

یہ فاصلے ایک سلسلہ حسابیہ میں ہیں جس کا فرق مشترک ع ہے۔

لہذا اگر کوئی جسم یکساں اسراع سے حرکت کرے تو مختلف ثانیوں میں یکے بعد دیگرے جو فاصلے طے ہوں گے وہ سلسلہ حسابیہ میں ہوں گے جس کا فرق مشترک اسراع کی اکائیوں کی تعداد کے مساوی ہوگا۔

کسی خاص ثانیہ کے دوران میں طے شدہ فاصلہ بطرز دیگر بھی معلوم ہو سکتا ہے جیساکہ دفعہ (۳۲) میں ہم نے دیکھا و ویں ثانیہ میں طے شدہ فاصلہ وہی ہوگا جو متحرک نقطہ ایک ایسی رفتار سے طے کرے جو اس ثانیہ کے عین درمیان میں اس کی رفتار ہے۔

اب و ویں ثانیہ کے عین درمیان میں رفتار وہی ہے جو (و - $\frac{۱}{۲}$) ثانیوں کے اختتام پر ہے یعنی رفتار

= ب + ع (و - $\frac{۱}{۲}$)

لہذا و ویں ثانیہ میں طے شدہ فاصلہ

= ب + ع $\frac{۲و - ۱}{۲}$

(۳۹) مثال (۱) ایک ریل گاڑی جو ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی تھی تین منٹ کے عرصہ میں بذریعہ یکساں ابطاء کے ساکن کردی گئی۔ یہ ابطاء معلوم کرو اور یہ بھی دریافت کرو کہ ساکن ہونے تک گاڑی نے کتنا فاصلہ طے کیا؟

٦٠ میل فی گھنٹہ = $\frac{۳ \times ۱۷٦٠ \times ٦٠}{٦٠ \times ٦٠}$ = ۸۸ فٹ فی ثانیہ

اگر ریل گاڑی کا اسراع ع ہو تو چونکہ ۱۸۰ ثانیوں میں ۸۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار زائل ہوکر معدوم ہو جاتی ہے اس لئے بموجب دفعہ (۳۲) ضابطہ (۱) ۰ = ۸۸ + ع × ۱۸۰

∴ ع = − $\frac{۲۲}{۴۵}$ فٹ سیکنڈ اکائی

[واضح ہو کہ ع کی قیمت منفی ہے کیونکہ یہ ابطاء ہے]

فرض کرو کہ فاصلہ طے شدہ لا ہے تو بذریعہ ضابطہ (۳)

۰ = ۸۸^{۲} + ۲ × (− $\frac{۲۲}{۴۵}$) × لا

∴ لا = ۸۸^{۲} × $\frac{۴۵}{۴۴}$ = ۷۹۲۰ فٹ

مثال (۲) ایک نقطہ یکسان اسراع سے حرکت کررہا ہے ابتداء حرکت سے گیارہویں اور پندرھویں ثانیوں میں وہ بالترتیب ۷۲۰ اور ۹٦٠ سینٹی میٹر طے کرتا ہے اسکی ابتدائی رفتار اور اس کا اسراع دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ابتدائی رفتار ب ہے اور اسراع ع ہے۔

تب ۷۲۰ = گیارھویں ثانیہ میں طے شدہ فاصلہ

∴ ۷۲۰ = ب + ع $\frac{۲ \times ۱۱ - ۱}{۲}$ = ب + $\frac{۲۱}{۲}$ ع ......(۱)

اسی طرح ۹٦٠ = ب + $\frac{۲۹}{۲}$ ع .... (۲)

مساوات (۱) و (۲) کو حل کرنے سے ب = ۹۰ اور ع = ٦٠

پس نقطہ ۹۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے شروع ہوا اور اس کا اسراع ٦٠ سینٹی میٹر ثانیہ اکائیاں ہیں۔

امثلہ نمبری (۵)

(۱) مقادیر ب، ع، ر، ف، و کے وہی معنے ہیں جو ان کو دفعہ ۳۲ میں دئے گئے ہیں۔

(۱) اگر ب = ۲، ع = ۳، و = ۵، تو ر اور ف معلوم کرو

(۲) اگر ب = ۷، ع = ۱۰، و = ۷، تو ر اور ف دریافت کرو

(۳) اگر ب = ۸، ر = ۳، ف = ۹، تو ع اور و معلوم کرو۔

(۴) اگر ب = -۶، ف = -۹، ع = -$\frac{۳}{۲}$، تو ب اور و دریافت کرو

طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں۔

(۲) ایک جسم حالت سکون سے حرکت شروع کرتا ہے اور اس کا اسراع ۲ فٹ ثانیہ اکائیاں ہیں تو ۲۰ ثانیوں کے اختتام پر اس کی رفتار اور طے شدہ فاصلہ دریافت کرو۔

(۳) اگر ایک جسم کی ابتدائی رفتار ۴ فٹ فی ثانیہ ہو اور اس کا اسراع ایک فٹ ثانیہ اکائی ہو تو کتنی مدت میں اس کی رفتار ۳۰ میل فی گھنٹہ ہو جائے گی۔

(۴) ایک جسم حالت سکون سے حرکت شروع کر کے ۱۰ ثانیوں میں ایک ہزار فٹ طے کرتا ہے تو اس کا اسراع دریافت کرو۔

(۵) ایک جسم حالت سکون سے حرکت شروع کرتا ہے اور اس کا اسراع ۳ سینٹی میٹر ثانیہ اکائیاں ہے تو کتنی مدت میں اس کی رفتار ۲۴ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہو جائیگی

اور اس مدت میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گا؟
(۶) ایک نقطے کی ابتدائی رفتار ۱۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ ہے اور اس کا اسراع ۲۰ سینٹی میٹر ثانیہ اکائیاں ہے تو دریافت کرو کہ اس کی رفتار صفر کب ہوگی اور اس وقت تک وہ کتنا فاصلہ طے کر چکے گا؟
(۷) ایک جسم حالت سکون سے شروع ہوکر یکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے اور دسویں ثانیہ میں ۱۷۱ فٹ طے کرتا ہے تو اس کا اسراع معلوم کرو۔
(۸) ایک ذرہ یکساں اسراع سے حرکت کررہا ہے اور ابتداء حرکت سے آٹھویں اور تیرھویں ثانیوں میں وہ بالترتیب $\frac{1}{2}$ ۸ فٹ اور $\frac{1}{2}$ ۷ فٹ طے کرتا ہے اس کی ابتدائی رفتار اور اس کا اسراع دریافت کرو۔
(۹) ایک ذرہ دو متصل ثانیوں میں بالترتیب $\frac{1}{2}$ ۲۰ اور $\frac{1}{2}$ ۲۳ فٹ حرکت کرتا ہے اور اس کا اسراع یکساں ہو تو ان دو ثانیوں میں سے پہلے کے شروع میں اسکی رفتار دریافت کرو اور اس کا اسراع بھی معلوم کرو۔ اور اگر یہ فرض کیا جائے کہ حرکت حالت سکون سے شروع ہوئی ہے تو دریافت کرو کہ پہلے ثانیہ کے شروع تک کتنا فاصلہ طے ہوا ہے؟
(۱۰) ایک متحرک نقطے کا اسراع یکساں ہے اور وہ اپنی حرکت کے آخری ثانیہ میں اپنے کل طے کردہ فاصلہ کا $\frac{9}{25}$

طے کرتا ہے اگر ابتداءً حرکت سکون سے ہو تو کل مدت حرکت اور طے شدہ فاصلہ دریافت کرو۔ یہ معلوم ہے کہ پہلے ثانیہ میں ۶ انچ فاصلہ طے ہوا۔

(۱۱) ایک نقطہ یکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے اور اس کی حرکت کے پہلے ثانیہ کے بعد جو نصف ثانیہ آتا ہے اس میں وہ ۲۵ فٹ طے کرتا ہے اور اپنی حرکت کے گیارھویں ثانیہ میں وہ ۱۹۸ فٹ چلتا ہے تو نقطہ کا اسراع اور اس کی ابتدائی رفتار معلوم کرو۔

(۱۲) ایک جسم پہلے تین ثانیوں میں یکساں اسراع سے چلتا ہے اور اس عرصہ میں کل ۸۱ فٹ طے کرتا ہے اس عرصہ کے اخیر میں اسراع معدوم ہو جاتا ہے اور اسراع معدوم ہونے کے بعد تین ثانیوں میں جسم ۷۲ فٹ طے کرتا ہے۔

اسکی ابتدائی رفتار اور اسراع معلوم کرو۔

(۱۳) ایک ریل گاڑی کی چال ۴۰ میل فی گھنٹہ سے ۱۰ میل فی گھنٹہ تک کم ہوگئی ہے اور وہ اس دوران میں کل ۱۵۰ گز طے کرتی ہے۔ اگر ابطاء یکساں ہو تو دریافت کرو کہ کتنا اور فاصلہ طے کرکے وہ ساکن ہوگی؟

(۱۴) ایک نقطہ حالت سکون سے حرکت کرتا ہے اور اس کا یکساں اسراع ۱۸ فٹ ثانیہ اکائیاں ہیں تو دریافت کرو کہ پہلا اور دوسرا اور تیسرا فٹ طے کرنے میں اس کو

کتنا وقت لگا؟

(۱۵) ایک ذرہ ایک نقطہ و سے ۴ فٹ فی ثانیہ کی یکساں رفتار سے چلتا ہے اور اس کے دو ثانیہ بعد ایک اور ذرہ نقطہ و سے اسی سمت میں حرکت کرتا ہے دوسرے ذرہ کی ابتدائی رفتار ۵ فٹ فی ثانیہ اور اسراع ۳ فٹ ثانیہ اکائیاں ہیں دریافت کرو کہ دوسرا ذرہ پہلے کو کس وقت اور کہاں جا ملے گا؟۔

(۱۶) ایک نقطہ اپنی حرکت کے پہلے ثانیہ میں ۷ فٹ طے کرتا ہے اور تیسرے اور چھٹے ثانیوں میں بالترتیب ۱۱ اور ۱۷ فٹ چلتا ہے۔ کیا اس کا اسراع یکساں ہو سکتا ہے؟

(۱۷) ایک نقطے کی رفتار شمال مشرق کی جانب ۶ ہے اور اس کا اسراع بجانب شمال ۸ اور بجانب شرق ۶ ہے۔ ایک ثانیہ کے بعد نقطے کا مقام دریافت کرو (اکائیاں فٹ اور ثانیہ ہیں)

(۱۸) ایک ذرہ ۲۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت شروع کرتا ہے اس کا ابطاء ۱۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ فی ثانیہ ہے دریافت کرو کہ وہ کتنے وقت میں ۱۵۰۰ سینٹی میٹر طے کرے گا (دوہرے جواب کی وجہ بیان کرو)

(۱۹) دو نقطے ایک ہی وقت ایک ہی مقام سے شروع ہوکر ایک خط مستقیم میں حرکت کرتے ہیں ایک کی

رفتار ب یکساں ہے اور دوسرے کا اسراع ع یکساں ہے تو ثابت کرو کہ ان کا درمیانی فاصلہ زیادہ سے زیادہ $\frac{ب^2}{2ع}$ ہو گا اور یہ ابتداءِ حرکت سے $\frac{ب}{ع}$ وقت کے اختتام پر ہو گا۔

(۲۰) ایک ریل گاڑی حالت سکون سے شروع ہو کر ۱۲ منٹ کے بعد پھر ساکن ہو جاتی ہے اور ہر ایک منٹ کے اختتام پر اس کی چالیں میلوں میں فی گھنٹہ یہ ہوتی ہیں ۲۵، ۴۰، ۵۰، ۵۰، ۴۵، ۴۰، ۴۰، ۴۵، ۴۵، ۳۵، ۲۰، ۰، چال اور وقت کے باہمی تعلق کا خطِ ترسیم کھینچو اور اوسط چال بھی دریافت کرو۔

(۲۱) ایک نقطہ حالت سکون سے حرکت شروع کرتا ہے اور اس کی رفتاریں فٹوں میں ہر ایک ثانیہ کے اختتام پر ساتویں ثانیہ تک یہ ہیں ۵، ۱۸، ۳۸، ۶۲، ۷۸، ۸۱، ۸۳، رفتار اور وقت کا خطِ ترسیم کھینچو اور معلوم کرو کہ سات ثانیوں میں کتنا فاصلہ طے ہوا اور یہ بھی دریافت کرو کہ اسراع زیادہ سے زیادہ کس وقت ہو گا اور اس وقت اس کی کیا قیمت ہو گی؟

(۲۲) حالت سکون سے شروع ہو کر پانچ پانچ ثانیہ کے بعد ایک جسم کی رفتاریں فٹوں میں فی ثانیہ یہ ہیں ۴، ۸٫۵، ۱۹، ۲۲، ۷، ۱۵، ۱۰، رفتار اور وقت کا خط ترسیم کھینچو اور ۳۰ ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ معلوم کرو

اور ۱۶ ثانیوں کے اختتام پر اسراع بھی دریافت کرو۔

باب سوم

حرکت بجاذبہ ارض

(۴۰) **گرتے ہوئے اجسام کا اسراع**۔ ہم روزمرہ دیکھتے ہیں کہ جب کوئی جسم اوپر سے زمین کی طرف گرتا ہے جوں جوں وہ نیچے آتا ہے اس کی حرکت کی تیزی بڑھتی جاتی ہے یعنی اسکی حرکت میں اسراع ہے اور اس اسراع کا یکساں ہونا ذیل کے تجربہ سے ثابت ہو سکتا ہے جو پہلے مورین نے کیا تھا۔

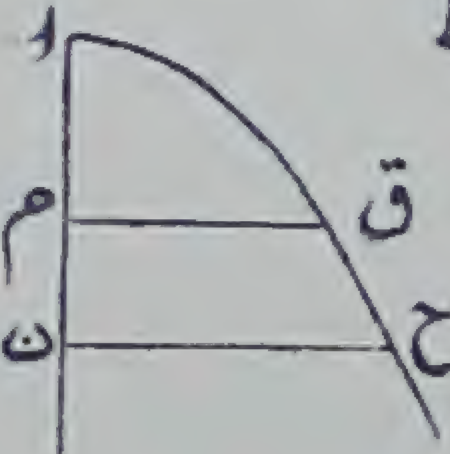
ایک مدور اسطوانے کے گرد کاغذ چڑھا کر ایک گھڑی کل کے ذریعہ سے گھمایا جاتا ہے اور اس گردش میں اسطوانہ کا محور عمودی رکھا جاتا ہے۔ اسطوانے کے سامنے لوہے کا ایک وزن ہوتا ہے۔ جس کو ایک پنسل چپ لگی ہوتی ہے اور اس وزن کو دو قائدوں کے ذریعہ مقید کرکے عمودی سمت میں اس طرح گرایا جاتا ہے کہ پنسل کا سرا اسطوانے پر کے کاغذ کو عین مس کرے۔

جب اسطوانے کی گردش یکساں ہوتی ہے اس وقت

وزن کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔



چونکہ پنسل پ کاغذ کو مس کرتی ہے اس لئے پنسل کے ذریعہ کاغذ پر ایک منحنی مرتسم ہو جاتا ہے۔ جب وزن زمین پر گر پڑتا ہے تو کاغذ کو اسطوانے پر سے اتار کر ایک سطح مستوی پر بچھا دیا جاتا ہے۔ اب پنسل کے کھینچے ہوے خط منحنی کے ملاحظہ سے معلوم ہوتا ہے کہ ابتداءِ حرکت سے پنسل کے طے کردہ عمودی فاصلے اس کے طے کردہ افقی فاصلوں کے مربعوں کے متناسب ہیں یعنی اگر ق اور ح خط منحنی پر دو نقطے ہوں تو



$$\frac{\text{ام}}{\text{ان}} = \frac{\text{قم}^2}{\text{حن}^2}$$

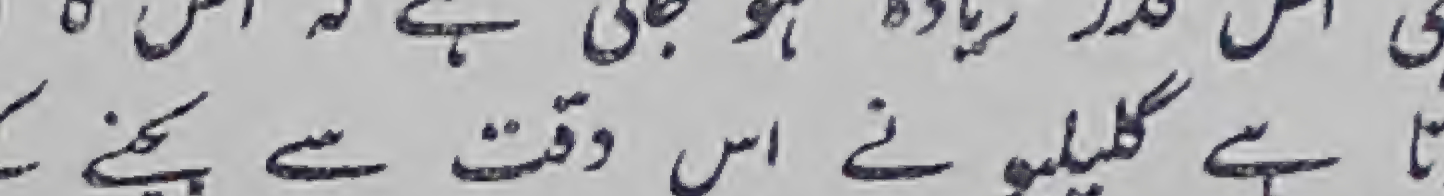
اب چونکہ اسطوانے کی گردش یکساں تھی اس لئے افقی فاصلے وقت کی ان مدتوں کے متناسب ہیں جو ابتداءِ حرکت سے شروع ہوئیں۔ لہذا ثابت ہوا کہ ابتداءِ حرکت سے جو عمودی فاصلہ طے ہوا وہ صرف شدہ وقت کے مربعے کے متناسب ہے۔

لیکن دفعہ (۳۴) سے ہمیں معلوم ہے کہ اگر کوئی جسم حالت سکون سے شروع ہو کر یکساں اسراع سے حرکت

کرے تو اس کا طے کردہ فاصلہ وقت کے مربعے کے متناسب ہے۔

پس ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ایک گرتا ہوا جسم یکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے۔

(۴۱) **گلیلیو کا تجربہ**۔ گرتے ہوئے اجسام کے اسراع کا یکساں ہونا پہلے پہل گلیلیو نے تقریباً ۱۵۹۰ء میں بمقام پائیسا چند تجربوں کے ذریعہ ثابت کیا تھا۔ چونکہ جب ایک جسم بغیر کسی روک کے نیچے گرتا ہے اس کی رفتار جلد ہی اس قدر زیادہ ہو جاتی ہے کہ اس کا اندازہ مشکل ہوتا ہے گلیلیو نے اس دقت سے بچنے کے لئے ایک سطح مائل پر اجسام کی حرکت کا ملاحظہ کیا اور اس نے یہ فرض کرلیا کہ اگر ایک چھوٹا سا گولا ایک سطح مائل پر ایک نالی میں نیچے کی طرف لڑھک کر جائے تو اسکی حرکت ایک ایسے قانون کے تابع ہوگی جو آزادانہ گرنے والے اجسام کا قانون حرکت ہے۔



سطح مائل کی نالی کی چوٹی سے شروع کرکے اس نے چند فاصلے ناپ لئے جو ۱، ۴، ۹، ۱۶،... یعنی 1^2، 2^2، 3^2، 4^2، ... کے متناسب تھے اور وہاں نشان لگادئے۔

تب اس نے اپنے چھوٹے گولے کو چوٹی پر سے چھوڑ کر اس امر کی تصدیق کی کہ ان فاصلوں کے طے کرنے میں جو وقت صرف ہوئے وہ ۱، ۲، ۳، ۴، ۔ ۔ ۔ ۔ کے متناسب ہیں لہذا ابتداء حرکت سے لے کر طے شدہ فاصلے صرف شدہ وقتوں کے مربعوں کے متناسب ہوئے لیکن بموجب دفعہ (۳۴) یہ اس حالت میں ہوتا ہے جب اسراع یکساں ہو۔

پس اس سے ثابت ہوا کہ ایک سطح مائل کے نیچے کی طرف حرکت کا اسراع یکساں ہوتا ہے اور اس نتیجہ سے گلیلیو نے یہ مان لیا کہ آزادانہ گرنے والے جسم کی حرکت کا اسراع بھی یکساں ہو گا۔

گلیلیو کو وقت ناپنے میں زیادہ دقت پیش آئی کیونکہ اس زمانے کے کلاک صحیح وقت نہیں دیتے تھے۔ اس نے اپنے تجربہ کے لئے پانی کا ایک برتن استعمال کیا جس کی عمودی تراش اچھی بڑی تھی اور جس کے پیندے میں ایک چھوٹا سا سوراخ تھا جو گلیگیو اپنی انگلی سے بند کرسکتا تھا جس وقت گولے کی حرکت شروع ہوتی تھی اسی وقت وہ اپنی انگلی ہٹا لیتا تھا اور پانی سوراخ میں سے نکلکر ایک دوسرے برتن میں گرنا شروع ہوتا تھا۔ یہ دوسرا برتن اسی مطلب کے واسطے تھا۔ جب گولا کسی ایک نشان پر پہنچتا تو وہ سوراخ کو بند کردیتا تھا جو پانی اس

دوران میں نکلتا اس کو تول لیا جاتا تھا اور اس پانی کا وزن مدت حرکت کا اچھا خاصا معیار تھا۔

(۴۲) مندرجہ بالا و دیگر صحیح تر تجربات کے نتائج سے ہمیں معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک جسم فضا میں زمین کی طرف گرے تو وہ ایک ایسے اسراع سے حرکت کریگا جو زمین کے ایک مقام پر ہمیشہ ایک ہی رہے گا لیکن مختلف مقامات پر اس میں تھوڑی سی تبدیلی ہوگی۔

اس اسراع کو "اسراع بجاذبہ ارض" کہتے ہیں اور اس اسراع کی قیمت کو ہمیشہ حرف "ج" سے تعبیر کرتے ہیں۔ جب فٹ ثانیہ اکائیاں استعمال ہوتی ہیں تو ج کی قیمت خط استوا پر ۳۲۰۰۹۱ اور قطبین پر ۳۲۰۲۵۲ ہوتی ہے سینٹی میٹر ثانیہ اکائیوں کی صورت میں ج کی انتہائی قیمتیں ۹۷۸ اور ۹۸۳ ہیں اور لندن کے عرض بلد میں ج کی قیمت ۹۸۱۰۱۷ ہے۔

ج کی قیمت معلوم کرنے کا بہترین طریقہ رقاص کے تجربات کے ذریعہ ہے۔ ہم باب یازدہم میں دوبارہ اس مضمون پر بحث کرینگے۔

[عددی مثالوں میں اگر کچھ اور نہ کہا گیا ہو تو یہ فرض کر لیا جائے کہ حرکت خلا میں ہے اور ج کی قیمت فٹ ثانیہ اکائیوں کی صورت میں ۳۲ اور سینٹی میٹر ثانیہ اکائیوں کی صورت میں ۹۸۱ ہے]

(۴۳) **حرکتِ عمودی بجاذبۂ ارض** - اگر زمین کے کسی مقام سے ایک جسم اوپر کی طرف عمودی سمت میں پھینکا جائے اور اس کی ابتدائی رفتار ب ہو تو جسم کا اسراع حرکت کی ابتدائی سمت کے مقابل ہوگا اس لئے وہ (-ج) سے تعبیر ہوگا۔ لہذا جسم کی رفتار بتدریج کم ہوتی جائے گی یہاں تک کہ وہ بالکل معدوم ہو جائے گی۔ اس وقت صرف ایک آن کیلئے جسم ساکن ہوگا پھر فوراً نیچے کی طرف رفتار حاصل کرنی شروع کریگا اور اسی راستے واپس نیچے آئے گا۔

ایک مفروض بلندی ی تک پہنچنے کے لئے جو وقت صرف ہوتا ہے وہ دفعہ (۳۲) کی مساوات (۲) میں بجائے ع کے (-ج) رکھنے سے حاصل ہوگا یعنی مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$ی = ب و - \frac{۱}{۲} ج و^{۲}$$

یہ درجہ دوم کی مساوات ہے جس کی دونو اصلیں مثبت ہیں - چھوٹی اصل سے وہ وقت حاصل ہوتا ہے جس وقت جسم اوپر جاتے ہوئے مفروض بلندی تک پہنچا اور بڑی اصل وہ وقت ہے جب جسم نیچے آتے ہوئے مفروض بلندی پر پہنچا۔

مثلاً اگر ایک جسم ۶۴ منٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اوپر کو پھینکا جائے اور یہ دریافت کرنا مطلوب ہو

کہ ۲۸ فٹ کی بلندی پر وہ کس وقت ہوگا تو وقت مطلوبہ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا۔

$$۲۸ = ۶۴\,و - ۱۶\,و^{۲}$$

اس مساوات سے $و = \frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۷}{۲}$

پس ابتداء حرکت سے نصف ثانیہ بعد جسم ۲۸ فٹ کی بلندی پر ہوگا اور اس وقت سے ۳ ثانیہ بعد وہ پھر اسی بلندی پر ہوگا۔

(۴۴) ایک مفروض بلندی پر رفتار۔ ایک مفروض بلندی ہی پر رفتار ر دفعہ (۳۲) کی مساوات (۲) سے حاصل ہو سکتی ہے یعنی

$$ر^{۲} = ب^{۲} - ۲\,ج\,ی$$

لہذا ایک مفروض بلندی پر کی رفتار اس مدت پر منحصر نہیں ہے جو ابتداء حرکت سے اس بلندی تک پہنچنے میں گذری۔ اور کل حرکت کے دوران میں کسی مقام پر رفتار کی مقدار ایک ہی ہوگی خواہ جسم اوپر کو جارہا ہو یا نیچے کو آرہا ہو۔

(۴۵) زیادہ سے زیادہ بلندی جہاں تک جسم پہنچ سکتا ہے۔

زیادہ سے زیادہ بلندی پر جسم کی رفتار صفر ہوگی۔ پس اگر زیادہ سے زیادہ بلندی لا ہو تو

$$۰ = ب^{۲} - ۲ ج ل$$

$$\therefore \text{زیادہ سے زیادہ بلندی} = \frac{ب^{۲}}{۲ج}$$

نیز زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچنے کا وقت ق اس مساوات سے حاصل ہوگا

$$۰ = ب - ج ق$$

$$\therefore ق = \frac{ب}{ج}$$

(۴۴) وہ رفتار جو ایک جسم حالت سکون سے شروع ہو کر ایک مفروض عمودی فاصلہ گر کر حاصل کرے۔

اگر کوئی جسم حالت سکون سے گرنا شروع کرے تو فاصلہ ی گرنے کے بعد اس کی رفتار اس طرح حاصل ہوگی کہ ہم دفعہ (۳۲) کی مساوات (۳) میں بجائے ب، ع، ف کے ۰، ج، ی رکھیں۔

$$\therefore ر = \sqrt{۲ ج ی}$$

امثلہ نمبری (۶)

(۱) ایک جسم زمین سے سمت عمودی میں ۸۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اوپر کو پھینکا جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ

(۱) وہ کتنی بلندی پر جاکر ساکن ہوگا (۲) ۹ فٹ کی بلندی پر پہنچنے کے لئے اسے کتنا وقت لگے گا؟

(۲) ایک ذرہ ۴۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے عمودی سمت میں اوپر پھینکا جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ (۱) اسکی رفتار ۲۵ فٹ فی ثانیہ کب ہوگی (۲) ۲۵ فٹ کی بلندی پر وہ کب ہوگا؟

(۳) ایک پتھر اوپر کی طرف عمودی سمت میں ۶۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ کتنا وقت گزرنے کے بعد اس کی رفتار ۲۰ فٹ فی ثانیہ ہوگی اور وہ اس وقت کتنی بلندی پر ہوگا؟

(۴) دریافت کرو کہ اگر ایک جسم حالت سکون سے نیچے کی طرف گرے تو (۱) ۱۰ ثانیہ میں وہ کتنا فاصلہ گرے گا (۲) ۱۰ فٹ کتنے وقت میں گریگا (۳) اگر ۱۰ ثانیہ میں ۱۰۰۰ فٹ گرے تو ابتدائی رفتار کیا ہوگی؟

(۵) ایک پتھر ایک کان میں نیچے کی طرف سمت عمودی میں پھینکا جاتا ہے اس کی ابتدائی رفتار ۹۶ فٹ فی ثانیہ ہے اور اور وہ ۳ ثانیہ میں کان کی تہ پر پہنچتا ہے۔ کان کا عمق دریافت کرو۔

(۶) ایک جسم ایک کان کی تہ سے اوپر کی طرف پھینکا جاتا ہے۔ کان کی گہرائی ۸۸ ج فٹ ہے اور جسم کی ابتدائی رفتار ۲۴ ج فٹ فی ثانیہ ہے۔

دریافت کرو کہ زیادہ سے زیادہ بلندی تک پہنچ کر سطح زمین پر واپس آنے میں جسم کو کتنا وقت لگے گا؟

(۷) ایک ذرہ جو اوپر کی طرف پھینکا گیا ہے ۲۲۵ فٹ کی بلندی پر پہنچ کر واپس آتا ہے۔ معلوم کرو کہ ابتدا سے کتنی مدت کے بعد ذرہ ۱۷۶ فٹ کی بلندی پر ہو گا؟

(۸) ایک جسم جو سمت عمودی میں اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے ۵۴۵٫۵ سینٹی میٹر کی بلندی پر ۴۳۶ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار رکھتا ہے۔ دریافت کرو کہ اس کی ابتدائی رفتار کیا ہے اور وہ کتنی مدت اور اوپر کو جائے گا؟

(۹) ایک ذرہ نیچے کو حرکت کرتے ہوئے ایک مقام سے ۵۰ میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے گذرتا ہے۔ تو دریافت کرو کہ اس سے کتنی مدت پہلے وہ اوپر کی طرف اسی رفتار سے جارہا تھا؟

(۱۰) ایک جسم ۶۵۴۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے سمت عمودی میں اوپر کو پھینکا گیا ہے تو معلوم کرو کہ وہ کتنا اونچا چڑھے گا اور کتنی مدت اس کی حرکت اوپر کو رہے گی؟

(۱۱) یہ معلوم ہے کہ ایک بغیر روک کے گرنے والا جسم چھٹے ثانیہ میں ۱۷۶٫۹۹ فٹ طے کرتا ہے تو ج کی

قیمت دریافت کرو۔

(۱۲) ایک گرنے والا ذرہ اپنی حرکت کے آخری ثانیہ میں ۲۲۴ فٹ طے کرتا ہے۔ دریافت کرو کہ وہ کتنی بلندی سے گرا اور اس کے گرنے میں کتنا وقت صرف ہوا؟

(۱۳) ایک جسم ایک مینار کی چوٹی سے بغیر روک کے گرتا ہے اور اپنی حرکت کے آخری ثانیہ میں کل فاصلہ کا $\frac{۱۶}{۲۵}$ طے کرتا ہے۔ مینار کی بلندی دریافت کرو۔

(۱۴) ایک جسم ایک مینار کی چوٹی سے گر کر اپنی حرکت کے آخری ثانیہ میں کل فاصلہ کا $\frac{۹}{۲۵}$ طے کرتا ہے۔ مینار کی اونچائی دریافت کرو۔

(۱۵) ایک پتھر ا ۹۶ فٹ فی ثانیہ کی ابتدائی رفتار سے اوپر کو سمت عمودی میں پھینکا گیا ہے۔ دریافت کرو کہ وہ کتنا اونچا چڑھے گا؟

اگر ا کی ابتداءِ حرکت سے ۴ ثانیہ بعد ایک دوسرا پتھر ب اسی مقام سے نیچے گرنے کو چھوڑ دیا جائے تو ثابت کرو کہ مزید ۴ ثانیہ کے بعد ا، ب کو جاملیگا۔

(۱۶) ایک جسم اوپر کی طرف ایک خاص رفتار سے پھینکا گیا ہے۔ اور یہ دیکھا جاتا ہے کہ اوپر جاتے ہوئے جب جسم ۹۶۰ فٹ کی بلندی پر ہوتا ہے تو اسی مقام پر واپس آنے کے لئے اسے ۴ سیکنڈ

لگتے ہیں - دریافت کرو کہ جسم کی ابتدائی رفتار کیا ہے اور وہ کتنی بلندی تک اوپر گیا؟

(۱۷) ایک جسم جو اوپر کو سمت عمودی میں پھینکا گیا ہے و ثانیہ میں ۲۰.۷ فٹ اور ۲ و ثانیہ میں ۲۲.۴ فٹ طے کرتا ہے تو و کی قیمت اور ابتدائی رفتار دریافت کرو۔

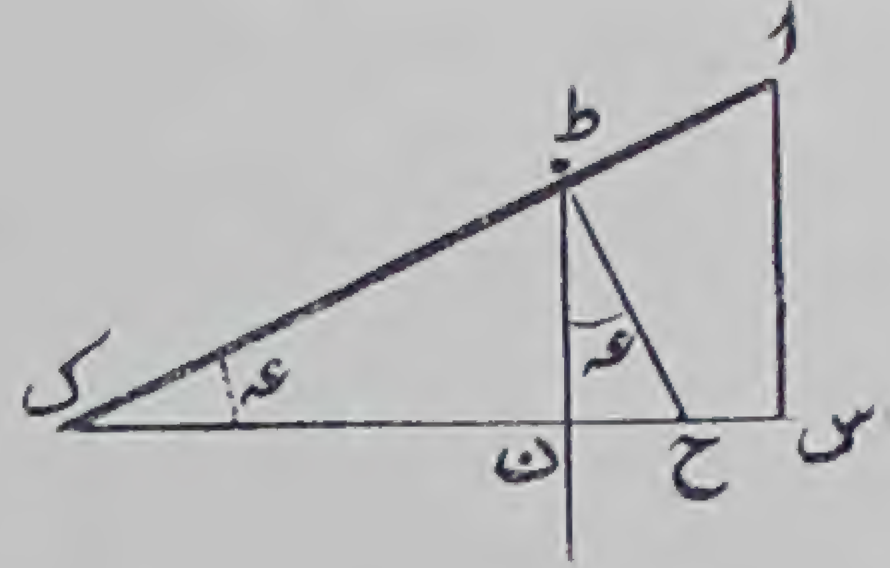
(۱۸) ایک پتھر ایک کنوئیں میں پھینکا گیا اور $\frac{۷}{۱۰}$ ۷ ثانیہ کے بعد پانی کی آواز سنائی دی - اگر آواز کی رفتار ۱۱۲۰ فٹ فی ثانیہ ہو تو کنوئیں کا عمق دریافت کرو۔

(۱۹) ایک پتھر ایک کنوئیں میں پھینکا گیا اور ۹۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پانی پر پہنچا - اگر ابتداءِ حرکت سے $\frac{۹}{۱۲}$ ۳ ثانیہ بعد پانی کی آواز سنائی دے تو آواز کی رفتار دریافت کرو۔

(۲۰) اگر چاند کی سطح پر ایک گرتے ہوئے جسم کا اسراع اس اسراع کا $\frac{۱}{۶}$ ہو جو سطح زمین پر گرتے ہوئے جسم کا ہے تو دریافت کرو کہ اگر چاند کی سطح پر ۴.۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک جسم اوپر کو سمت عمودی میں پھینکا جائے تو وہ کتنا اوپر جائے گا؟

(۴۷) ایک چکنی سطح مائل پر نیچے کو حرکت۔

فرض کرو کہ ایک چکنی سطح مائل کی تراش عمودی ہے اور سطح کا میلان افق سے عہ ہے اور فرض کرو کہ سطح مائل پر ایک جسم ط ہے۔



اگر سطح مائل حائل نہ ہو تو جسم سمت شاقولی میں، اسراع ج سے، نیچے کو حرکت کرے گا۔

اب اسراعوں کے متوازی الاضلاع کے مسئلہ کی رو سے شاقولی اسراع ج، دو اسراعوں کے مساوی ہے

(۱) اسراع ج جم عہ سطح پر عمود وار ط ح کی سمت میں (۲) اسراع ج جب عہ سطح کے متوازی نیچے کی طرف۔

سطح کی عمود وار سمت میں حرکت نا ممکن ہے کیونکہ سطح خود حائل ہے۔

اس لئے جسم سطح کے نیچے کی طرف اسراع ج جب عہ کے ساتھ حرکت کریگا۔

اور اس کی حرکت کی تحقیقات اسی طرح ہوگی جیسے ایک بغیر روک گرنے والے جسم کی صورت میں ہوئی۔ فرق صرف اتنا ہے کہ ج کی بجائے ج جب عہ استعمال ہوگا۔

اس سے فوراً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ حالت سکون سے شروع ہو کر سطح مائل کا طول ل طے کرنے میں رفتار محصلہ

$$\sqrt{\text{۲ج} \times \text{اس}} = \sqrt{\text{۲ج} \times \text{ل جب عہ}} = \sqrt{\text{۲ج جب عہ} \times \text{ل}} =$$

لہذا یہ رفتار وہی ہے جو ایک جسم بغیر روک سمت شاقولی میں گرتے ہوئے سطح مائل کی بلندی کے برابر فاصلہ طے کر کے حاصل کرے۔ یا دوسرے لفظوں میں رفتار محصلہ سطح کے میلان پر منحصر نہیں ہے بلکہ اس فاصلے پر منحصر ہے جو جسم نے سمت شاقولی میں طے کیا۔

(۴۸) اگر جسم سطح مائل پر اوپر کی طرف ابتدائی رفتار ب سے پھینکا جائے تو اس کی حرکت کی تحقیقات اسی طریقہ سے ہو گی جو دفعات ۴۳ تا ۴۵ میں استعمال ہوا۔ زیادہ سے زیادہ فاصلہ جو سطح کے اوپر کی طرف طے ہوگا

وہ $\dfrac{\text{ب}^2}{\text{۲ ج جب عہ}}$ ہے۔

اور اس فاصلے کے طے کرنے میں جو وقت صرف ہوگا

وہ $\dfrac{\text{ب}}{\text{ج جب عہ}}$ ہے وقس علیٰ ہذا۔

امثلہ نمبری (۷)

(۱) ایک جسم ۸۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک چکنی

سطح مائل کے اوپر کی طرف پھینکا جاتا ہے۔
سطح کا میلان ۳۰° ہے۔ جسم کے ساکن ہونے تک طے شدہ فاصلہ اور صرف شدہ وقت دریافت کرو۔

(۲) ایک چکنی سطح مائل کا طول ۱۵ فٹ اور ارتفاع ۱۲ فٹ ہے۔ ایک وزنی ذرہ اس کی چوٹی سے نیچے کو پھسل کر آتا ہے۔ دریافت کرو کہ زمین تک پہنچنے میں کتنا وقت لگیگا اور اس وقت ذرے کی رفتار کیا ہوگی؟

(۳) ایک ذرہ ایک چکنی مائل سطح پر نیچے کی طرف پھسل کر ۱۶√۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار حاصل کرتا ہے۔ سطح کا طول ۱۶ فٹ ہے اس کا میلان دریافت کرو۔

(۴) ایک جسم کو ایک چکنی مائل سطح کے ارتفاع کے مساوی فاصلہ سمت شاقولی میں بغیر روک کے گرنے سے جتنا وقت صرف ہوتا ہے اس سے چارگن وقت اس سطح کے طول میں پھسلنے کے لئے درکار ہوتا ہے۔ سطح کے ارتفاع اور طول کی نسبت دریافت کرو۔

(۵) ایک سطح کا میلان افق سے جب$^{-1}$ ۳/۵ ہے اور ایک ذرہ اسی پر پہلے اوپر کی طرف پھر نیچے کی طرف پھینکا جاتا ہے۔ دونو صورتوں میں ابتدائی رفتار ۱۶ فٹ فی ثانیہ ہے۔ ہر ایک صورت میں دریافت کرو کہ ۴ ثانیہ میں کتنا فاصلہ طے ہوگا اور کتنی رفتار حاصل ہوگی؟

(۶) ایک ذرہ ایک مائل سطح پر نیچے کی طرف بغیر رگڑ کے گرنے

پھسلتا ہے۔ اور پانچویں ثانیہ میں ۲۲۰۷،۲۵ سنٹی میٹر طے کرتا ہے۔ افق سے سطح کا میلان دریافت کرو۔

(۷) اب ایک دائرے کا عمودی قطر ہے اور ک ل ایک اور قطر ہے جو اب سے زاویہ طہ بناتا ہے۔ اگر ک ل کے طول میں ایک ذرے کے پھسلنے کا وقت فاصلہ اب گرنے کے وقت سے دوگنا ہو تو طہ کی قیمت دریافت کرو۔

(۴۹) **مسئلہ**۔ اگر ایک عمودی دائرہ کے بلند ترین مقام سے مختلف وتر کھینچے جائیں۔ تو ہر ایک وتر پر ایک ذرہ کی پھسلنے کی مدت ایک ہی ہوگی۔

فرض کرو کہ دائرہ کا عمودی قطر ق ط ہے اور ق بلند ترین مقام ہے اور ق ت کوئی ایک وتر ہے۔ فرض کرو کہ زاویہ ت ق ط = طہ،



فرض کرو کہ ق ت = لہ اور ق ط = ل

اس لئے لہ = ل جم طہ

حسب طریق دفعہ گذشتہ ق ت کے نیچے کی طرف اسراع ج جم طہ ہوگا۔ اگر ق سے ت تک وقت و صرف ہو تو اس کا مطلب یہ ہے کہ ایک ذرہ حالت سکون سے شروع ہوکر اسراع ج جم طہ سے حرکت کرکے وقت و میں فاصلہ ق ت طے کرتا ہے

$$\therefore \text{ل} = \frac{1}{2}\,\text{ج جم طہ} \times \text{و}^2$$

$$\therefore \text{و} = \sqrt{\frac{\text{۲ل}}{\text{ج جم طہ}}} = \sqrt{\frac{\text{۲ل}}{\text{ج}}}$$

یہ نتیجہ طہ کی قیمت پر منحصر نہیں ہے اور وقت و وہی ہے جو فاصلہ ق ط سمت شاقولی میں گرنے کے لئے صرف ہوتا۔

پس اس دائرے کے جتنے وتر نقطہ ق سے کھینچے جائیں ان میں سے ہر ایک پر ذرہ کے پھسلنے کی مدت ایک ہی ہوگی۔

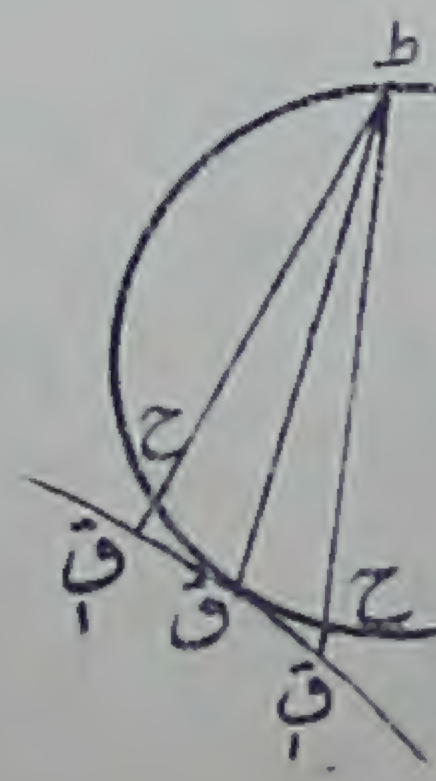
اگر وتر دائرے کے سب سے نچلے نقطے سے کھینچے جائیں تو یہ مسئلہ ان وتروں کے لئے بھی درست ہوگا

(۵۰) **تیز ترین نزول کے خطوط**۔ اگر ایک نقطہ اور ایک خط منحنی ایک ہی عمودی سطح میں واقع ہوں تو اس نقطے سے اس خط منحنی تک تیز ترین نزول کا خط وہ خط مستقیم ہے جس کے طول پر ایک جسم اس نقطے سے خط منحنی تک قلیل ترین مدت میں پھسل سکے۔

عموماً یہ وہ خط نہیں ہوتا جو نقطہ مفروضہ سے منحنی تک طول میں چھوٹے سے چھوٹا عمل ہندسی سے کھینچا جائے۔ مثلاً ایک نقطہ مفروضہ سے ایک سطح مستوی تک چھوٹے سے چھوٹا خط تو اس پر عمود ہوتا ہے لیکن یہ تیز ترین نزول کا خط نہیں ہوسکتا جب تک کہ سطح مستوی افقی نہ ہو۔

(۵۱) مسئلہ - ایک نقطہ مفروضہ ط سے ایک خط منحنی تک جو ایک ہی عمودی سطح میں ہوں تیز ترین نزول کا خط ط ق ہوگا جہاں ق خط منحنی پر ایسا نقطہ ہے کہ ایک دائرہ جس کا بلند ترین نقطہ ط ہو خط منحنی کو ق پر مس کرے

فرض کرو کہ ایک ایسا دائرہ کھینچا گیا ہے کہ ط اس کا بلند ترین نقطہ ہے اور وہ خط منحنی کو ق پر خارجاً مس کرتا ہے۔ خط منحنی پر کوئی اور نقطہ ق، لو۔ اور فرض کرو کہ ط ق، دائرے کو ح پر قطع کرتا ہے۔



تب چونکہ ط ق > ط ح

اسلئے ط ق پر پھسلنے کی مدت > ط ح پر پھسلنے کی مدت

لیکن ط ح پر پھسلنے کی مدت = ط ق پر پھسلنے کی مدت

(دفعہ ۴۹)

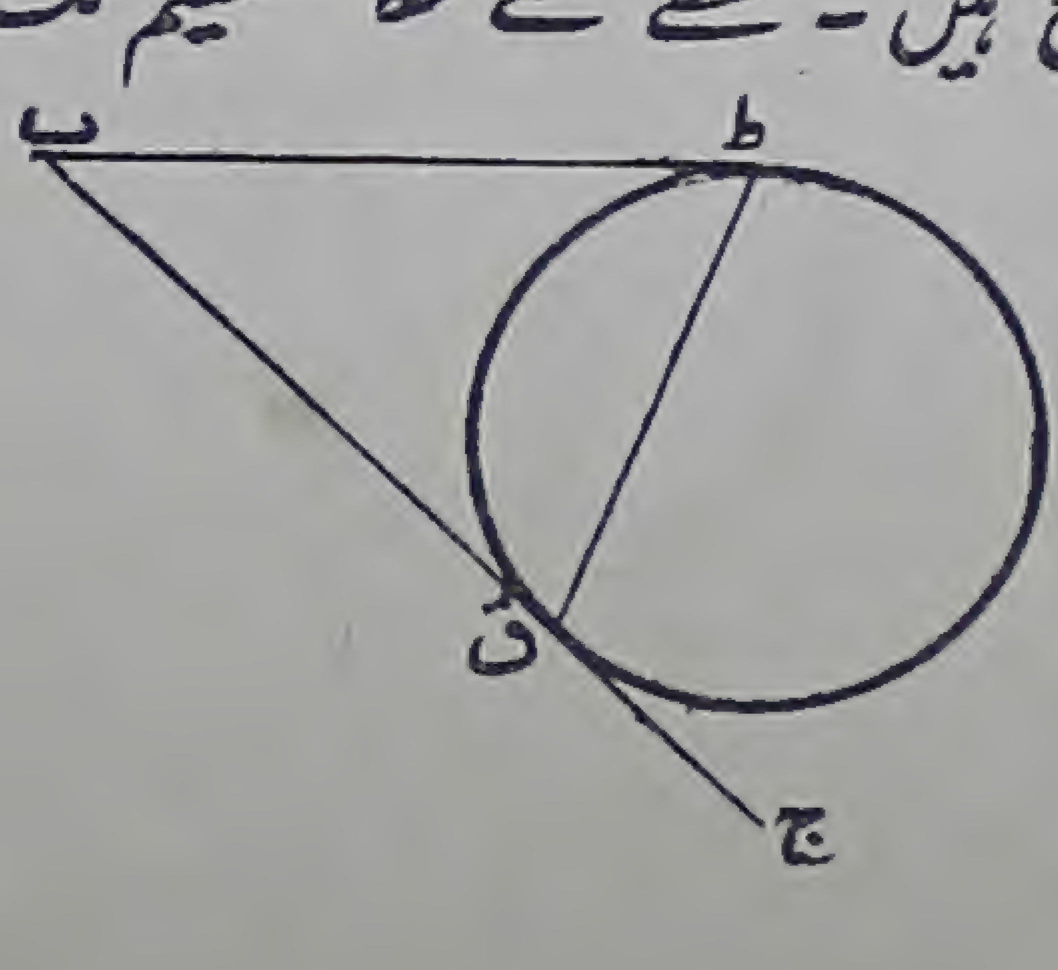
لہٰذا ط ق پر پھسلنے کی مدت > ط ق پر پھسلنے کی مدت

اور ق خط منحنی پر کوئی سا نقطہ ہے۔

پس اگر کوئی اور خط مستقیم ط سے خط منحنی تک کھینچا جائے اس پر پھسلنے کی مدت ط ق پر پھسلنے کی مدت سے زیادہ ہوگی۔

اسی طرح ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ اگر ایک خط منحنی سے ایک نقطہ مفروضہ ط تک تیز ترین نزول کا خط مطلوب ہو تو ایسا دائرہ کھینچنا چاہئے جس کا سب سے نچلا نقطہ ط ہو اور جو خط منحنی کو ق پر مس کرے۔ تب ق ط خط مستقیم مطلوب ہوگا۔

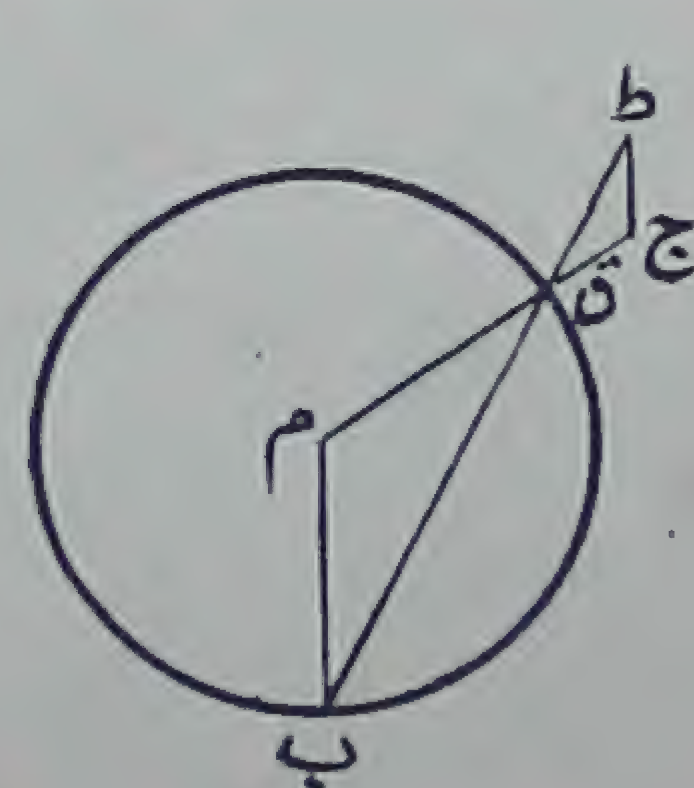
مثال (۱) ایک نقطہ ط اور ایک خط مستقیم ایک ہی عمودی سطح میں واقع ہیں۔ نقطے سے خط مستقیم تک تیز ترین نزول کا خط دریافت کرو۔



فرض کرو کہ ب ج خط مستقیم مفروض ہے۔ تو ہمیں صرف ایک دائرہ کھینچنا ہے جس کا بلند ترین نقطہ ط ہو اور جو ب ج کو مس کرے۔ ط سے ط ب خط افقی کھینچو جو ب ج کو ب پر ملے۔ ب ج سے ب ق مساوی ب ط کے قطع کرو۔ تو ط ق خط مطلوب ہوگا۔ کیونکہ یہ ظاہر ہے کہ ایک ایسا دائرہ کھینچا جا سکتا ہے جو ب ط اور ب ق کو بالترتیب ط اور ق پر مس کرے

مثال (۲) ایک نقطہ مفروضہ سے ایک دائرہ مفروضہ تک تیز ترین نزول کا خط دریافت کرو۔ نقطہ اور دائرہ ایک ہی عمودی سطح میں واقع ہیں۔

فرض کرو کہ ب دائرہ مفروضہ کا پست ترین نقطہ ہے۔ ط ب کو ملاؤ اور فرض کرو کہ ط ب دائرے کو ق پر قطع کرتا ہے۔ تو ط ق خط مطلوب ہوگا۔



دائرے کے مرکز م کو ق سے ملاؤ اور م ق کو اسقدر بڑھاؤ کہ ط میں سے گذرنے والے عمودی خط سے ج پر ملے۔

تب زاویہ ق ط ج = زاویہ م ب ق کیونکہ م ب اور ج ط متوازی ہیں

اور زاویہ م ب ق = زاویہ م ق ب = زاویہ ج ق ط

پس اگر ج کو مرکز اور ج ط کو نصف قطر مان کر ایک دائرہ کھینچیں تو اس کا بلند تریں نقطہ ط ہوگا اور وہ دائرہ مفروضہ کو نقطہ ق پر مس کریگا

اگر ط، دائرہ مفروضہ کے اندر واقع ہو تو ط کو اس کے بلند تریں نقطے سے ملا کر بڑھاؤ تاکہ دائرے کو ق پر ملے۔ تو ط ق خط مطلوب ہوگا۔

(۵۲) مثال (۱) ایک کان کے گڑھے کا پنجرا اسراع کی ۲ فٹ ثانیہ اکائیوں سے نیچے اترتا ہے۔ اس کی ابتداءِ حرکت سے ۱۰ ثانیے بعد ایک ذرہ گڑھے کی چوٹی سے نیچے کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ کتنے وقت کے بعد ذرہ پنجرے پر لگیگا؟

فرض کرو کہ وقت مطلوب و ہے۔ وقت و میں ذرہ، ½ ج و² فاصلہ گرے گا۔

پنجرے کی مدت حرکت (و + ۱۰) سیکنڈ ہے۔

اس مدت میں پنجرا $\frac{1}{2} \times 2 \times (و + 10)^2$ یعنی $(و + 10)^2$ فاصلہ گریگا۔

لہٰذا $(و + 10)^2 = \frac{1}{2}$ ج $و^2 = 16 و^2$

$\therefore$ $و + 10 = 4 و$

$\therefore$ $و = 3\frac{1}{3}$ سیکنڈ

مثال (2) ایک پتھر سمت راس میں ایسی رفتار سے پھینکا گیا ہے جو اسے 100 فٹ کی بلندی تک پہنچا سکے۔ دو سیکنڈ بعد اسی مقام سے ایک اور پتھر اسی سمت میں اسی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ وہ کب اور کہاں ملیں گے؟

فرض کرو کہ ابتدائی رفتار ر ہے۔ چونکہ پتھر 100 فٹ کی بلندی تک پہنچ سکتا ہے اس لئے

$0 = ر^2 - 2$ ج $\times 100$

$\therefore$ $ر = \sqrt{2 \text{ ج} \times 100} = 80$

فرض کرو کہ پہلے پتھر کی ابتداء حرکت سے و سیکنڈ بعد دونو پتھر ملتے ہیں۔

تب جو فاصلہ پہلے پتھر نے و سیکنڈ میں طے کیا وہی فاصلہ دوسرے پتھر نے (و - 2) سیکنڈ میں طے کیا۔

$\therefore$ $80 و - \frac{1}{2}$ ج $و^2 = 80(و - 2) - \frac{1}{2}$ ج $(و - 2)^2$

$= 80 و - 160 - \frac{1}{2}$ ج $(و^2 - 4 و + 4)$

∴ ۱۶۰ = $\frac{1}{2}$ ج (۴ و − ۴) = ۱۶ (۴ و − ۴)

∴ و = ۳ $\frac{1}{2}$ سیکنڈ

نیز بلندی جس پر وہ ملتے ہیں = ۸۰ و − $\frac{1}{2}$ ج و² = ۲۸۰ − ۱۹۶ = ۸۴ فٹ
پہلا پتھر نیچے آرہا ہوگا اور دوسرا پتھر اوپر جا رہا ہوگا۔

امثلہ نمبری (۸)

(۱) ایک غبارے سے جو ۳۲ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے اوپر چڑھ رہا ہے ایک پتھر نیچے چھوڑا جاتا ہے اور وہ ۱۷ سیکنڈ میں زمین پر پہنچتا ہے۔ دریافت کرو کہ جب پتھر چھوڑا گیا اس وقت غبارہ کتنا اونچا تھا؟

(۲) ایک جسم ۶۴ فٹ کی بلندی سے نیچے چھوڑا جاتا ہے اور اسی وقت زمین پر سے ایک اور جسم اوپر کو ۶۴ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے پھینکا جاتا ہے۔ بتاؤ کہ وہ کتنے وقت کے بعد ملیں گے؟
اگر پہلا جسم دوسرے سے ایک سیکنڈ بعد چھوڑا جائے تو وہ کب ملیں گے؟

(۳) ایک برج کی بلندی ۲۸۸ فٹ ہے۔ ایک جسم برج کی چوٹی پر سے نیچے چھوڑا جاتا ہے اور عین اسی وقت ایک دوسرا جسم زمین پر سے اوپر کو سمت راس میں پھینکا جاتا ہے۔ دونو برج کے نصف پر ملتے ہیں۔ دریافت کرو کہ پھینکے ہوئے جسم کی ابتدائی رفتار کیا تھی

اور پہلے جسم کو ملنے کے وقت رفتار کیا ہے؟

(۴) ایک جسم ایک برج کی چوٹی پر سے نیچے چھوڑا جاتا ہے اور اسی وقت ایک اور جسم اسی عمودی سیدھ میں زمین پر سے اوپر کو پھینکا جاتا ہے۔ دوسرے جسم کی رفتار اس قدر ہے کہ اسے برج کی چوٹی تک پہنچا دے۔ معلوم کرو کہ دونو جسم کہاں ملیں گے؟

(۵) ایک ذرہ بلندی ل سے نیچے چھوڑا جاتا ہے اور اس فاصلے کا $\frac{۲}{۳}$ گر چکنے کے بعد وہ ایک اور ذرے کے پاس سے گذرتا ہے جو اسی وقت اوپر کو پھینکا گیا تھا۔ معلوم کرو کہ دوسرا ذرہ کہاں تک پہنچیگا؟

(۶) ایک جسم ایک سطح مائل کی چوٹی پر سے نیچے پھسلنا شروع کرتا ہے اور اسی وقت ایک اور جسم سطح کے پائے سے سطح کی اوپر کی طرف ایسی رفتار سے پھینکا جاتا ہے کہ دونو سطح کے عین نصف پر ملتے ہیں۔ تو رفتار رمی دریافت کرو اور ملنے کے وقت دونو کی رفتاریں بھی معلوم کرو۔

(۷) ایک جسم رفتار ر سے اوپر کو پھینکا جاتا ہے اور و سیکنڈ گزرنے کے بعد ایک اور جسم اسی رفتار سے اوپر کو پھینکا جاتا ہے۔ معلوم کرو کہ وہ کب اور کہاں ملیں گے؟

(۸) ایک غبارہ ۳۲ فٹ سیکنڈ اکائیوں کے اسراع

سے اوپر کو چڑھتا ہے ۔ آدھے منٹ کے بعد ایک جسم اس میں سے نیچے چھوڑ دیا جاتا ہے ۔ معلوم کرو کہ وہ جسم زمین پر کس وقت پہنچیگا؟

(۹) ایک گولہ ۵ سیکنڈ تک بجاذبۂ ارض گر کر ایک شیشے کی سطح میں سے گذرتا ہے اور اس کی نصف رفتار ضائع ہو جاتی ہے ۔ اگر اس کے بعد زمین تک پہنچنے میں اس کو ایک سیکنڈ لگے تو زمین سے شیشے کی بلندی دریافت کرو ۔

(۱۰) ایک گرتا ہوا جسم اپنی حرکت کے آخری سیکنڈ میں جو فاصلہ طے کرتا ہے اسکو اس فاصلے سے جو وہ آخری سے پہلے سیکنڈ میں طے کرتا ہے ۳ اور ۲ کی نسبت ہے ۔ دریافت کرو کہ جسم کتنی بلندی سے نیچے چھوڑا گیا اور کتنی رفتار سے زمین پر پہنچا؟

(۱۱) ایک سطح مائل کا طول ۲۸۸ فٹ اور ارتفاع ۶۴ فٹ ہے ۔ اسکو ایسے تین حصوں میں تقسیم کرو کہ اگر ایک ذرہ اس کی چوٹی سے چھوڑا جائے تو تینوں حصے مساوی اوقات میں طے ہوں اور یہ اوقات بھی معلوم کرو ۔

(۱۲) اگر ایک عمودی دائرے کے افقی قطر کے ایک سرے سے وتر کھینچے جائیں تو ثابت کرو کہ ان وتروں پر ایک ذرے کے پھسلنے کے اوقات اسطرح بدلیں گے

جس طرح سمت عمودی سے وتروں کے میلانوں کے
مماسوں کے جذر۔

(۱۳) متعدد چکنی سلاخیں ایک نقطے ا پر ملتی ہیں اور
ان پر چھلّے چڑھے ہوئے ہیں جو ایک ہی وقت
ا سے چلتے ہیں اور نیچے کو پھسلتے ہیں۔ ثابت کروکہ
وقت و کے بعد سب چھلّے ایک کرے پر ہونگے

جس کا نصف قطر $\frac{ج\,و^{2}}{۴}$ ہے۔

(۱۴) متعدد چکنی مائل سطحیں ایک نقطے پر ملتی ہیں اور
اس نقطے پر شروع ہوکر ایک افقی سطح پر ختم ہوتی
ہیں۔ متعدد چکنے اجسام اس نقطے سے شروع ہوکر
مائل سطحوں پر نیچے کی طرف پھسلتے ہیں۔ ثابت کروکہ
محصلہ رفتاریں مساوی ہونگی۔

(۱۵) ایک وزنی جسم ایک مائل سطح کے ارتفاع میں
نیچے کو گرتا ہے اور دوسرا اس کے طول میں نیچے کو
پھسلتا ہے۔ ثابت کروکہ صرف شدہ وقت اس طرح
بدلتے ہیں جس طرح طے شدہ فاصلے اور یہ کہ محصلہ
رفتاریں برابر ہیں۔

(۱۶) ایک وزنی ذرہ ایک چکنی مائل سطح پر نیچے کو
پھسلتا ہے۔ سطح کا ارتفاع دیا ہوا ہے۔
ثابت کروکہ نزول کا وقت اس طرح بدلتا ہے جسطرح

سمت عمودی سے سطح کے میلان کا قاطع۔

(۱۷) ایک عمودی دائرے کے متعدد چلنے وتر اسکے سب سے نچلے نقطے پر ملتے ہیں۔ اگر ایک جسم ان پر نیچے کی طرف پھسلے تو ثابت کرو کہ محصلہ رفتار اس طرح بدلیگی جس طرح وتر کا طول۔

(۱۸) اگر دو دائرے اپنے بلند ترین یا پست ترین نقطے پر مس کریں اور اس نقطے میں سے ایک خط کھینچا جائے جو دونو دائروں کو ملے تو اس خط کا جو حصہ دونو دائروں کے اندر ہے اس پر نیچے کو پھسلنے کا وقت ایک ہی رہے گا۔

(۱۹) ایک سطح مائل کا ارتفاع ف ہے اور افق سے میلان عہ ہے اور اس پر ایک نالی کھدی ہوئی ہے جس کا میلان خط میلان اعظم سے بہ ہے۔ تو معلوم کرو کہ اگر ایک ذرہ سطح کی چوٹی سے اس نالی میں حرکت شروع کرے تو وہ اس نالی کو کتنے عرصہ میں طے کرے گا؟

(۲۰) اگر ایک فاصلہ ف ، ن مساوی حصص میں تقسیم کیا جائے۔ اور ہر ایک حصے کے اخیر پر ایک متحرک ذرے کا اسراع بقدر $\frac{ف}{ن}$ زیادہ کیا جائے تو معلوم کرو کہ فاصلہ ف طے کرنے کے بعد ذرے کی رفتار کیا ہو گی اگر وہ حالت سکون سے باسراع ع حرکت شروع کرے۔

(۲۱) ایک ذرہ حالت سکون سے باسراع ع حرکت شروع کرتا ہے۔ وقت و کے بعد اس کا اسراع ۲ ع ہو جاتا ہے۔ اور وقت ۲ و کے بعد ۳ ع ہو جاتا ہے و علیٰ ہذا القیاس۔ وقت ن و کے بعد اس کی رفتار دریافت کرو اور ثابت کرو کہ طے شدہ فاصلہ یہ ہوگا

$$\frac{ن (ن + ۱) (۲ن + ۱)}{۱۲} ع و^2$$

(۲۲) ایک جسم حالت سکون سے شروع ہو کر یکساں اسراع سے حرکت کرتا ہے۔ ثابت کرو کہ ($ن^2$ + ن + ۱) ویں ثانئے میں طے شدہ فاصلہ دو فاصلوں کے مجموعے کے مساوی ہے۔ ایک، پہلے ن ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ اور دوسرا، پہلے (ن + ۱) ثانیوں میں طے شدہ فاصلہ۔

(۲۳) کرۂ زمین پر دو مختلف مقام ہیں۔ ایک مقام پر جب ایک ذرہ ایک خاص بلندی سے گرتا ہے تو بمقابلہ دوسرے مقام کے اس کی رفتار محصلہ م فٹ فی ثانیہ زیادہ ہوتی ہے لیکن وقت ن ثلثہ کم صرف ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ ہر دو مقامات پر ج کی عددی قیمتوں کا اوسط ہندسی $\frac{م}{ن}$ ہے۔

(۲۴) ایک ریل گاڑی ایک سٹیشن پر سے چل کر دوسرے

سٹیشن پر جا ٹھیرتی ہے۔ دونو سٹیشنوں کے درمیان ایک میل کا فاصلہ ہے اور گاڑی اپنے سفر کے پہلے دو ثلث میں یکساں اسراع سے حرکت کرتی ہے اور آخری ثلث میں اس کا ابطاء یکساں ہے اور کل فاصلہ طے کرنے میں تین منٹ لگتے ہیں۔ گاڑی کا اسراع، ابطاء اور اس کی رفتار اعظم دریافت کرو۔

(۲۵) ایک انجن اپنی پوری چال سے چل رہا ہے۔ اس وقت اچانک اس کو بریک لگا دیا جاتا ہے اور بھاپ بند کردی جاتی ہے۔ اس کے بعد پہلے سیکنڈ میں انجن ۸۷ فٹ چلتا ہے اور دوسرے سیکنڈ میں ۸۵ فٹ۔ دریافت کرو کہ انجن کی اصلی چال کیا تھی اور وہ کتنے وقت میں ساکن ہو جائے گا اور اس وقت میں کتنا فاصلہ طے کرے گا؟ یہ فرض کرلیا جائے کہ بریک سے یکساں ابطاء پیدا ہوتا ہے۔ اور اگر انجن کے ساتھ گاڑی لگی ہو اور انجن اور گاڑی کا طول ۹۶ گز ہو اور اگر بریک لگنے کے وقت ایک شخص انجن سے ۸۴ گز آگے کی طرف کھڑا ہو تو گاڑی کتنے وقت میں اس شخص کو گذر جائے گی؟

(۲۶) ایک ریل گاڑی ایک سٹیشن سے چل کر دوسرے سٹیشن پر جا ٹھیرتی ہے اور اس سفر کے پہلے حصہ میں اسراع ع سے چلتی ہے اور جب بریک لگادئے

جاتے ہیں اور بھاپ بند کردی جاتی ہے تو اس کا ابطاء ع' ہوتا ہے۔ اگر سٹیشنوں کے درمیان فاصلہ ل ہو تو ثابت کرو کہ ایک سٹیشن سے دوسرے سٹیشن تک صرف شدہ وقت $\sqrt{2ل\frac{ع+ع'}{ع\,ع'}}$ ہوگا۔

(۲۷) ایک ریل گاڑی سٹیشن ا سے سٹیشن ب تک چلتی ہے اور اس سفر کے پہلے چوتھے حصے میں اس کا اسراع یکساں ہے اور آخری چوتھے حصے میں اس کا ابطاء یکساں ہے اور درمیانی نصف حصے میں چال یکساں رہتی ہے۔ ثابت کرو کہ ریل گاڑی کی اوسط چال پوری چال کا $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

(۲۸) ایک پنجرا ۶۰۰ فٹ گہرے گڑھے کی تہ سے یکساں اسراع کے ساتھ اوپر کو چڑھتا ہے۔ گڑھے کی چوٹی کے قریب اوپر وار قوت مسدود کی جاتی ہے اور پنجرے کی حرکت محصلہ ہی اسکو عین چوٹی تک پہنچا دیتی ہے۔ اگر کل وقت صرف شدہ ۳۰ سیکنڈ ہو۔ معلوم کرو کہ حرکت کے پہلے حصے میں اسراع کیا تھا اور زیادہ سے زیادہ رفتار کیا تھی؟

(۲۹) ایک ریل گاڑی حالت سکون سے شروع ہوکر پانچ منٹ میں اپنی زیادہ سے زیادہ چال یعنی ۵۰ میل فی گھنٹہ حاصل کرلیتی ہے اور اسی چال سے

چلتی رہتی ہے - یہاں تک کہ دوسرا سٹیشن نصف میل رہ جاتا ہے - تو اسراع اور ابطاء کی قیمتیں فٹ سیکنڈ اکائیوں میں دریافت کرو اور یہ بھی معلوم کرو کہ کل سفر میں جو یکصد میل تھا کتنا وقت صرف ہوا- اور سارے سفر کے لئے رفتار اور وقت کا خط منحنی کھینچو -

باب چہارم

قوانین حرکت

(۵۳) اس باب میں ہم اس امر پر غور کریں گے کہ حرکت کس طرح پیدا ہوتی ہے۔ لیکن پہلے ہمیں چند تعریفات کی ضرورت ہوگی۔

مادّہ وہ ہے جو حواس کے ذریعہ محسوس ہو سکے۔ **یا** وہ جس پر قوت لگ سکے یا جو قوت لگا سکے۔ اگر کوئی شخص مادہ کی کیفیت سے ناواقف ہو تو ہم مادہ کی کوئی ایسی تعریف نہیں کر سکتے جس سے اس شخص کو مادہ کی کیفیت معلوم ہو جائے۔ وقت اور فضا کی طرح مادے کا تصور بھی اوّلی ہے۔

ذرہ مادہ کا ایک حصہ ہے جس کے تمام ابعاد نہایت ہی چھوٹے ہوں۔ جو بہر حال اس قدر چھوٹا ہو کہ ہماری تحقیقات کی غرض کے لئے اس کے مختلف حصص کے

درمیانی فاصلے نظر انداز ہو سکیں۔ بعض اوقات ایک محدود ناپ کا جسم بھی ذرہ سمجھا جا سکتا ہے مثلاً کرکٹ کی گیند جو اوپر کو پھینکی جائے یا ایک پتھر جو اوپر سے نیچے کو گرے۔ اور آفتاب کے گرد زمین کی حرکت پر غور کرنے میں زمین کو بھی ذرہ خیال کر سکتے ہیں۔

جسم مادہ کا ایک حصہ ہے جو سطحوں سے گھرا ہوا ہو اور جو ہر طرف سے محدود ہو۔ یعنی اس میں ذرات کی بہت بڑی تعداد ہوتی ہے۔

ایک جسم کی مقدار مادہ کو **کمیت** کہتے ہیں۔

قوت وہ ہے جو کسی جسم کی حالت سکون یا حالتِ حرکتِ **یکساں** کو بدلے یا بدلنے کی قابلیت رکھے۔

شاید طالب علم یہ خیال کرے کہ ان تعریفات سے پورا مفہوم ادا نہیں ہوتا۔ ہم ذیل میں ان تعریفات کی تشریح کرینگے۔

اگر کسی قسم کے مادّے مثلاً لوہے کا چھوٹا سا ٹکڑا ایک چکنی میز پر پڑا ہو تو ہم اسے ذرا ڈھکیل کر آسانی سے حرکت دے سکتے ہیں۔ اگر اسی لوہے کی زیادہ مقدار لیں، تو اتنا ہی زور لگانے سے وہ ایسی آسانی سے نہیں حرکت کر سکیگا۔ اسی طرح اگر ہم نقرہ (پلاٹینیم) اور لکڑی کے دو ٹکڑے لیں جو ایک ہی

ناپ اور شکل کے ہوں تو ان پر ایک سا زور لگانے سے اثر اور نتیجے مختلف ہوں گے - ایسی ہی ایک اور مثال پر غور کرو - ایک توپ کا گولہ اور اسی ناپ کا ایک لکڑی کا گولہ لو اور ان کو زمین پر رکھ کر دونو کو ایک سی ٹھوکر مارو تو لکڑی کے گولے پر اثر زیادہ ہوگا اور توپ کے گولے پر کم - اسی طرح اگر ایک سی ٹھوکریں دو پیپوں کو لگائی جائیں جن میں سے ایک پانی سے بھرا ہوا ہو اور دوسرا اسی ناپ کا لیکن خالی ہو تو ان ٹھوکروں کے اثر کا ملاحظہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ دونو میں کتنا فرق ہے -

پس ان تجربوں سے ثابت ہوا کہ اگر مختلف اجسام کو جن کی ظاہری شکل اور حالت ایک ہو ایک سا زور لگایا جائے تو ہمیشہ نتیجہ ایک سا نہیں ہو گا - نتائج میں فرق کیوں ہے صرف اسلئے کہ ہر ایک جسم کی کمیت مادہ مختلف ہے -

(۵۴) اگر ایک ہی مقدار مادہ پر دو قوتیں یکے بعد دیگرے لگائی جائیں اور ایک مدت معینہ تک انکے عمل کرنے سے اس مقدار مادہ میں ایک ہی رفتار پیدا ہو تو وہ دو قوتیں مساوی کہلاتی ہیں -

اگر دو مختلف مقادیر مادہ کو ایک ہی قوت لگائی جائے اور وہ قوت ایک مدت معینہ تک عمل کرکے

ہر ایک مقدار میں ایک ہی رفتار پیدا کرے تو دونو مقادیر مادہ مساوی کہلائیں گی۔

طالب علم کو معلوم ہوگیا ہوگا کہ ہم یہاں یہ تسلیم کر لیتے ہیں کہ مختلف مواقع پر ایک سی قوتیں پیدا کرنا ممکن ہے۔ مثلاً ہم یہ مان لیتے ہیں کہ اگر ایک چکر دار کمانی کو کھینچ کر مختلف اوقات میں ایک سا لمبا کیا جائے اور باقی حالات متعلقہ نہ بدلیں تو ہر صورت میں کمانی کو اتنا کھینچے رکھنے میں ایک سی قوت درکار ہو گی۔

اس لئے ایک ہی قوت بار بار لگاکر ہم کمیت مادہ کی معیاری اکائی کے مساوی متعدد مقادیر مادہ حاصل کر سکتے ہیں۔ اور مساوی مقادیر مادہ معلوم کرنے کا نظری طریقہ جو ہر صورت میں ہو سکے یہی ہے۔

عملاً ہم کو معلوم ہوگا کہ مساوی مقادیر مادہ کے اوزان بھی مساوی ہوتے ہیں اور تول کر مقادیر مادہ کا باہمی مقابلہ نہایت آسانی سے ہو سکتا ہے۔

(۵۵) کمیت مادہ کی برطانوی اکائی شہنشاہی پونڈ کہلاتی ہے اور یہ نقریہ (پلاٹینم) کا ایک ٹکڑا ہے جو ویسٹ منسٹر میں رکھا گیا ہے۔ اور بعینہ ایسے اور ٹکڑے دیگر محفوظ مقامات پر بھی رکھے گئے ہیں۔

کمیت مادہ کی فرانسیسی یا علمی اکائی گرام کہلاتی ہے اور نقریہ (پلاٹینم) کی ایک خاص مقدار جو پیرس میں رکھی گئی ہے اس کا ہزارواں حصہ گرام ہے۔ ابتداءً منشا یہ تھا کہ سنیٹی گریڈ کے ۴ درجہ حرارت پر خالص پانی کے ایک مکعب سنیٹی میٹر کی کمیت مادہ کو گرام کہا جائے۔

یہ اکائی پونڈ سے بہت چھوٹی ہے

ایک گرام = ۱۵٫۴۳۲ گرین تقریباً

ایک پونڈ = ۴۵۳٫۶ گرام تقریباً

اکائیوں کا وہ نظام جس میں سنیٹی میٹر، گرام اور ثانیہ بالترتیب طول، کمیت مادہ اور وقت کی اکائیاں ہیں اکائیوں کا س گ ث نظام کہلاتا ہے۔

(۵۶) **کثافت** - ایک یکساں جسم کے حجم کی اکائی میں جو مقدارِ مادہ ہو وہ اس جسم کی کثافت کہلاتی ہے۔ پس اگر کسی جسم کی کمیت مادہ م ہو اور اس کا حجم ح ہو اور کثافت ک ہو تو

م = ح ک

(۵۷) ایک جسم کا **وزن** وہ قوت ہے جس سے زمین اس کو اپنی طرف کھینچتی ہے۔

یہہ ثابت ہو سکتا ہے کہ دنیا میں مادہ کا ہر ایک ذرہ ہر ایک دوسرے ذرے کو ایک ایسی قوت سے کھینچتا ہے جو ذرات کی کمیات مادہ کے حاصل ضرب کی راست نسبت اور ان کے درمیانی فاصلے کے مربعے کی معکوس نسبت سے بدلتی ہے۔ پس اس سے یہ نتیجہ نکل سکتا ہے کہ اگر ایک ذرہ ایک کرے کی سطح پر یا اس کے باہر واقع ہو تو کرہ اس ذرے کو ایک ایسی قوت سے کھینچتا ہے جو ذرے اور مرکز کرہ کے درمیانی فاصلے کے مربعے کی معکوس نسبت سے بدلتی ہے۔ لیکن زمین کی شکل کامل طور پر کروی نہیں ہے اس لئے اسکی سطح کے نقاط مرکز سے مساوی فاصلوں پر نہیں ہیں۔ پس ایک معینہ مقدار مادہ پر زمین کی کشش اسکی سطح کے تمام نقاط پر بالکل ایک نہیں ہو سکتی یعنی ایک معینہ مقدارِ مادہ کا وزن زمین کے مختلف مقامات پر قدرے مختلف ہوگا۔

(۵۸) ایک جسم کا **معیار حرکت** اس کی کمیت مادہ اور رفتار کے حاصل ضرب کے تناسب ہوتا ہے۔

اگر معیارِ حرکت کی اکائی کمیت مادہ کی اکائی کے معیارِ حرکت کو لیا جائے جب اس کی رفتار، رفتار کی اکائی

ہو تو ایک جسم کا معیارِ حرکت م ر ہوگا جہاں م اس کی کمیت مادہ ہے اور ر رفتار ہے۔ معیارِ حرکت کی سمت وہی ہوگی جو رفتار کی۔

اگر ۱۰۰ گرام کا ایک جسم ۲۷۵ سنیٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو اس کے معیارِ حرکت میں ۲۷۵۰۰ سنیٹی میٹر گرام ثانیہ اکائیاں معیارِ حرکت کی ہونگی۔

(۵۹) اب ہم قوانین حرکت کو بیان کر سکتے ہیں جو عام طور پر نیوٹن کے قوانین حرکت کہلاتے ہیں پہلے دو کو گلیلیو نے ۱۵۹۰ء کے قریب دریافت کیا تھا اور تیسرا قانون پرنسیپیا کی اشاعت سے قبل کسی نہ کسی شکل میں ہک، ہائی گنس، والیس، رین و دیگر ریاضی دانوں کو معلوم تھا۔

نیوٹن نے ان قوانین کو اپنی کتاب پرنسیپیا مطبوعہ ۱۶۸۶ء میں منضبط کیا

قوانین حرکت یہہ ہیں۔

قانون اول۔ کسی جسم کی سکون کی حالت یا خطِ مستقیم میں اس کی یکساں حرکت کی حالت ہرگز نہیں بدل سکتی جب تک کہ کوئی بیرونی قوت اس پر عمل کرکے اس حالت کو نہ بدلے۔

قانون دوم۔ معیارِ حرکت کی شرحِ تبدل قوتِ عاملہ کے

متناسب ہوتی ہے اور اس کی سمت اس خطِ مستقیم کی سمت ہوتی ہے جس میں کہ قوت عمل کرتی ہے۔

قانون سوم۔ ہر ایک عملِ قوت کے متساوی اور متقابل ایک جوابِ عمل ہوتا ہے۔

ان تینوں قوانین کا کوئی برہانی یا تجرباتی یا دیگر ثبوت نہیں دیا جا سکتا۔ لیکن ان قوانین پر تمام علم حرکت کی بنیاد ہے اور علمِ حرکت پر علمِ ہیئت بنی ہے۔ اور علم ہیئت سے جو نتائج حاصل ہوتے ہیں اور جو پیشین گوئیاں کی جاتی ہیں ان کا تطابق عینی مشاہداتِ عالم سے اس قدر مکمل ہے کہ اس علم کے بنیادی قوانین کا غلط ہونا حیطۂ قیاس سے باہر ہے۔ مثلاً بحری جنتری چار سال پہلے شائع ہوتی ہے اور اس میں چاند اور سیاروں کی حرکات کے متعلق پیشین گوئیاں ہوتی ہیں اور سورج گرہن اور چاند گرہن کے متعلق وقت اور مقام کی شرح ہوتی ہے۔ اور یہ تمام پیشین گوئیاں ہمیشہ صحیح نکلتی ہیں۔ پس مندرجۂ بالا تین قوانینِ حرکت کی صحت پر ہمارے اعتقاد کی اصلی وجہ یہ ہے کہ جو نتائج ان سے ماخوذ ہوتے ہیں وہ ہمارے مشاہدات سے متفق اور مطابق ہیں۔

(۶۰) **قانون اول**۔ اس قانون کی مثال ہمیں روئے زمین پر نہیں مل سکتی کیونکہ عملاً یہ ناممکن ہے کہ

کسی جسم کی حرکت کے دوران میں اس پر کوئی قوت عمل نہ کرے۔ لیکن اس قانون کا تقریبی عمل ہم اس صورت میں دیکھ سکتے ہیں جب خشک اور سخت برف کا ایک ٹکڑا خشک صاف برف کی افقی سطح پر حرکت دیا جائے۔ برف کے ٹکڑے پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں۔ ایک برف کے ٹکڑے اور برف کی سطح کے درمیان **فرک** یا رگڑ۔ دوسری ہوا کی مزاحمت۔ برف کی سطح جتنی زیادہ صاف اور چکنی ہوگی اتنی زیادہ دور برف کا ٹکڑا جائیگا۔ اور ہوا کی مزاحمت جس قدر کم ہوگی اسی قدر زیادہ دور وہ ٹکڑا جائے گا۔ اس قانون کا بیان دعوے یہ ہے کہ اگر برف مکمل طور پر چکنی ہو اور **فرک** بالکل معدوم ہو اور اگر ہوا کی مزاحمت بھی نہ ہو اور جسم پر کوئی اور قوت عمل نہ کرے تو وہ ہمیشہ ایک خطِ مستقیم میں یکساں رفتار سے چلتا رہے گا۔

یہ قانون **اصول جمود** کو بیان کرتا ہے۔ وہ اصول یہ ہے کہ کسی جسم کا یہ طبعی میلان نہیں ہے کہ اپنی سکون کی حالت کو یا خطِ مستقیم میں یکساں حرکت کی حالت کو خود بخود بدل سکے۔ اگر لوہے کا ایک ٹکڑا زمین پر پڑا ہو تو وہ خود حرکت نہیں کرسکتا۔ اس کی حرکت اسی وقت ممکن ہے جب ایک بیرونی قوت اس پر عمل کرے۔

اگر دھات کا ایک ٹکڑا رسی میں باندھکر ایک چکنی افقی میز پر گھمایا جائے اور دورانِ حرکت میں رسی ٹوٹ جائے تو چونکہ دھات کے ٹکڑے پر اب کوئی قوت عمل نہیں کرتی اس لئے وہ خطِ مستقیم میں حرکت شروع کرے گا۔ جس نقطے پر دھات کے ٹکڑے کی مدور حرکت بند ہوئی اس نقطے پر کے خطِ مماس کی سمت حرکت کی سمت ہو گی۔

اگر کوئی شخص ایک تیز چلتی ہوئی ریل گاڑی میں سے نکل کھڑا ہو تو وہ بالعموم گر پڑتا ہے۔ اس کے پاؤں زمین کے ساتھ لگتے ہی ساکن ہو جاتے ہیں۔ اور چونکہ جسم کے اوپر کے حصے پر کوئی قوت عمل نہیں کرتی اسلئے اس حصے کی پہلی حرکت جاری رہتی ہے اور وہ زمین پر گر پڑتا ہے۔

اگر ایک شخص گھوڑے پر سوار ہو اور گھوڑا خوب تیز جا رہا ہو اور چلتے چلتے اچانک ٹھیر جائے تو اگر سوار اچھا نہ ہو تو گھوڑے کے سر کے اوپر سے نیچے گر جائے گا۔

اگر کوئی آدمی ایک گاڑی کی پچھلی جگہ پر بیٹھا ہو اور گاڑی اچانک چل پڑے تو اس آدمی کے پیچھے گرنے کا خطرہ ہے۔

(۶۱) **قانون دوم**۔ اس قانون سے ہم قوت ناپنے کا طریقہ اخذ کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ ایک جسم کی مقدار مادہ م ہے اور ایک قوت ق اس پر عمل کرکے اسراع ع پیدا کرتی ہے۔

تب حسب قانون دوم

ق ∝ شرحِ تبدلِ معیارِ حرکت

∝ شرحِ تبدلِ م ر جہاں ر رفتار ہے

∝ م × شرحِ تبدلِ ر (اگر م غیر متبدل ہے)

∝ م × ع

∴ ق = لہ × م ع جہاں لہ ایک مقدار مستقل ہے

اب فرض کرو کہ قوت کی اکائی ایک ایسی قوت ہے جو کمیت مادہ کی ایک اکائی میں اسراع کی ایک اکائی پیدا کرتی ہے۔

اس لئے جب م = ۱ اور ع = ۱، تو ق = ۱

لہذا لہ = ۱

قوت کی اکائی کا انتخاب جب یہ ہو گیا تو مساوات بالا کی یہ صورت ہوگی

ق = م ع

اس لئے جب اکائیوں کا مناسب انتخاب کیا جائے تو قوت کا ناپ معیارِ حرکت کی شرح تبدل کے ناپ کے مساوی ہوتا ہے۔

(۶۲) دفعہ سابقہ سے ظاہر ہے کہ علم حرکت میں قوت کی اکائی کی مقدار کا انحصار کمیت مادہ اور اسراع کی اکائیوں پر ہے۔ اور بموجب دفعات ۹ و ۲۹ اسراع کی اکائی طول اور وقت کی اکائیوں پر منحصر ہے۔ اس لئے قوت کی اکائی کا انحصار کمیت مادہ، طول اور وقت کی اکائیوں پر ہے۔ جب یہ اکائیاں معلوم ہوں تو قوت کی اکائی معلوم ہو سکتی ہے۔

جب کمیت مادہ، طول اور وقت کی اکائیاں پونڈ، فٹ اور ثانیہ ہوں تو ان کی متعلقہ قوت کی اکائی **پونڈل** کہلاتی ہے۔

اس لئے مساوات ق = م ع بالکل درست ہے جہاں م جس میں پونڈوں کی تعداد ہے اور ق قوت عاملہ کے پونڈلوں کی تعداد ہے اور ع اسراع کی اکائیوں کی تعداد ہے جو کمیت مادہ م میں قوت ق کے عمل سے پیدا ہوئیں۔

یہہ تعلق بعض اوقات اس صورت میں بیان کیا جاتا ہے

$$\text{اسراع} = \frac{\text{قوتِ محرّکہ}}{\text{مقدارِ مادۂ محرّکہ}}$$

یادداشت - اس کتاب میں قوت کی اکائی پونڈل ہو گی جب تک کہ خاص طور پر کہا نہ جائے - مثلاً جب ہم کہیں گے کہ ایک رسی کا تناؤ ت ہے تو اس سے ہمارا مطلب ت پونڈل ہو گا۔

(۶۳) جب کمیت مادہ، طول اور وقت کی اکائیاں گرام، سینٹی میٹر اور ثانیہ ہوں تو ان کی متعلقہ قوت کی اکائی کو ڈائین کہتے ہیں - یہ نام ایک یونانی لفظ سے مشتق ہے جس کے معنی قوت ہیں -

پس جب اس نظام میں مساوات ق = م ع کا استعمال کیا جائے تو قوت کا اندازہ ڈائینوں میں ہو گا اور کمیت مادہ کا گراموں میں اور اسراع کا سینٹی میٹر ثانیہ اکائیوں میں -

(۶۴) قوت کی اکائی اور کمیت مادہ کی اکائی کے وزن کا باہمی تعلق۔

جیسا کہ دفعہ ۴۲ میں بیان ہوا ہمیں معلوم ہے کہ جب ایک جسم خلا میں آزادانہ گرتا ہے تو وہ ایک ایسے اسراع سے حرکت کرتا ہے جسے ہم "ج" سے تعبیر کرتے ہیں اور جو قوت کہ اس اسراع کو پیدا کرتی ہے وہ ہے جسے ہم جسم کا وزن کہتے ہیں۔

اب اگر کمیت مادہ کی اکائی پر قوت کی اکائی عمل کرے تو

اس میں اسراع کی اکائی پیدا کرتی ہے
اس لئے اگر کمیت ماہ کی اکائی پر قوت کی ج اکائیاں عمل کریں تو وہ اسراع کی ج اکائیاں پیدا کرینگی (بموجب قانون دوم) لیکن کمیت مادہ کی اکائی کا وزن ہی ہے جو اس میں اسراع کی ج اکائیاں پیدا کرتا ہے۔
پس کمیت مادہ کی اکائی کا وزن = قوت کی ج اکائیاں

(۶۵) اکائیوں کا فٹ پونڈ ثانیہ نظام۔

اس نظام میں ج تقریباً ۳۲ء۲ کے مساوی ہے
اس لئے ایک پونڈ کا وزن قوت کی ج اکائیوں کے برابر ہے یعنی ج پونڈلوں کے مساوی ہے، جہاں
ج = ۳۲ء۲ تقریباً
پس ایک پونڈل ایک پونڈ کا تقریباً $\frac{۱}{۳۲ء۲}$ ہے یعنی تقریباً نصف اونس کے وزن کے مساوی ہے۔
چونکہ روئے زمین کے مختلف مقامات پر ج کی قیمتیں مختلف ہیں اور پونڈل ایک ایسی قوت ہے جو ہر جگہ ایک ہی رہتی ہے اس سے یہ نتیجہ نکلا کہ پونڈ کا وزن ایک مقدارِ مستقل نہیں ہے بلکہ روئے زمین کے مختلف مقامات پر مختلف ہے۔

(۶۶) اکائیوں کا سینٹی میٹر گرام ثانیہ نظام۔

اس نظام میں ج تقریباً ۹۸۱ کے برابر ہے
اس لئے ایک گرام کا وزن قوت کی ج اکائیوں کے

مساوی ہے یعنی ج ڈائینوں کے برابر ہے جہاں
ج = ۹۸۱ تقریباً
پس ڈائین ایک گرام کا تقریباً $\frac{۱}{۹۸۱}$ ہے
ڈائین پونڈل سے بہت چھوٹی اکائی ہے ان کا باہمی تعلق بطریق ذیل آسانی سے معلوم ہو سکتا ہے۔

$$\frac{\text{ایک پونڈل}}{\text{ایک ڈائین}} = \frac{\frac{۱}{۳۲٫۲}\ \text{ایک پونڈ کے وزن کا}}{\frac{۱}{۹۸۱}\ \text{ایک گرام کے وزن کا}}$$

$$= \frac{۹۸۱}{۳۲٫۲} \times \frac{\text{ایک پونڈ}}{\text{ایک گرام}} = \frac{۹۸۱}{۳۲٫۲} \times ۴۵۳٫۶$$

(بموجب دفعہ ۵۵)

پس ایک پونڈل = ۱۳۸۰۰ ڈائین تقریباً

امثلہ نمبری (۹)

(۱) ایک جسم پر جس کی کمیت مادہ ۲۰ پونڈ ہے ایک غیر متبدل قوت عمل کرتی ہے اور ۵ ثانیہ میں ۱۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار پیدا کرتی ہے۔ اگر جسم ابتدا میں ساکن تھا تو قوت کی مقدار معلوم کرو۔

بذریعہ مساوات ب ر = ب + ع و

ع = $\frac{۱۵}{۵}$ = ۳

∴ اگر قوت میں ق پونڈل ہوں تو

ق = ۲۰ × ۳ = ۶۰ پونڈل

(۲) ایک ۱۰ پونڈ کمیت مادہ والا جسم ایک چکنی افقی سطح پر پڑا ہے اور اس پر ایک ۳ پونڈ وزن کے مساوی قوت عمل کرتی ہے۔ دریافت کرو کہ ۱۰ ثانیہ میں وہ کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

سوال ہذا میں قوت محرکہ = ۳ پونڈ کا وزن = ۳ ج پونڈل

اور مقدارِ مادۂ محرکہ = ۱۰ پونڈ

پس اگر فٹ ثانیہ اکائیاں استعمال ہوں تو اسراع = $\frac{\text{۳ج}}{\text{۱۰}}$

∴ فاصلہ مطلوبہ = $\frac{\text{۱}}{\text{۲}} \times \frac{\text{۳ج}}{\text{۱۰}} \times \text{۱۰}^{\text{۲}}$ = ۴۸۰ فٹ

(۳) اس قوت کی مقدار معلوم کرو جو ایک کیلو گرام پر ۵ ثانیہ عمل کرکے اس میں ایک میٹر فی ثانیہ کی رفتار پیدا کرے

یہاں رفتار محصلہ = ۱۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ

اس لئے اسراع = ۲۰ س گ ث اکائیاں

پس قوت = ۲۰×۱۰۰۰ ڈائین = $\frac{\text{۲۰×۱۰۰۰}}{\text{۹۸۱}}$ گرام کا وزن تقریباً

= ۲۰٫۴ گرام کا وزن تقریباً

(۴) ذیل کی تین صورتوں میں اسراع معلوم کرو

(۱) ۵ پونڈل کی قوت ۱۰ پونڈ کمیت مادہ والے جسم پر عمل کرتی ہے۔

(۲) ۵ پونڈ کے وزن کے مساوی قوت ۱۰ پونڈ کمیت مادہ والے جسم پر عمل کرتی ہے۔

(۴) ۵۰ پونڈ وزن کی قوت ۱۰ ٹن مقدار مادہ پہ عمل کرتی ہے۔

(۵) ایک قوت ۲۰ پونڈ کی مقدارِ مادہ میں ۱۰ فٹ ثانیہ اکائیاں اسراع کی پیدا کرتی ہے۔ قوت کی مقدار پونڈلوں میں اور پونڈوں کے وزن میں دریافت کرو۔

(۶) ایک ایسی قوت معلوم کرو جو ۱۶۰ پونڈ مقدار مادہ پر ۵ سیکنڈ عمل کرکے اس میں ۱۵ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار پیدا کرے۔ مقدارِ مادہ ایک چکنی میز پر پڑی ہے اور قوت سمت افقی میں عمل کرتی ہے۔

(۷) ۱۰ ہنڈرڈ ویٹ مقدار مادہ پر ایک قوت ۱۰ ثانیہ عمل کرکے اس میں تین میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا کرتی ہے۔ قوت کی مقدار معلوم کرو۔

(۸) ۲ پونڈ وزن کی ایک قوت ۴۰ پونڈ کی مقدار مادہ پر آدھ منٹ عمل کرتی ہے۔ اور اتنے وقت میں محصلہ رفتار اور طے شدہ فاصلہ معلوم کرو۔

(۹) ایک جسم ایک یکساں قوت کے زیر عمل ۱۰ سیکنڈ میں ۷ میٹر طے کرتا ہے قوت کا مقابلہ جسم کے وزن سے کرو اور رفتار محصلہ دریافت کرو۔

(۱۰) ایک پونڈ وزن کی قوت ۱۸ پونڈ مقدار مادہ پر ایک چکنی افقی سطح پر عمل کرتی ہے۔
دریافت کرو کہ ۵۰ فٹ فاصلہ طے کرنے کے بعد اسکی

کیا رفتار ہو گی؟

(۱۱) ایک جسم کی کمیت مادہ ۲۰۰ ٹن ہے اور اس پر ۱۱۲۰۰۰ پونڈل کی قوت عمل کرتی ہے۔ بتاؤ کہ کتنی مدت میں اس کی رفتار تیس میل فی گھنٹہ ہو گی؟

(۱۲) ایک ٹن کی مقدارِ مادہ ۱۰ پونڈ وزن کی قوت کے زیر عمل کتنی مدت میں ۱۴ فٹ کا فاصلہ طے کرے گی؟

(۱۳) ۲۲۴ پونڈ کی کمیت مادہ ایک افقی چکنی سطح پر پڑی ہے۔ ایک یکساں قوت اس پر ۵ سیکنڈ عمل کرکے اس کو اتنے وقت میں ۵۰ فٹ کا فاصلہ طے کراتی ہے۔ ثابت کرو کہ قوت تقریباً ۲۸ پونڈ وزن کے برابر ہے۔

(۱۴) ایک گاڑی کی مقدار مادہ ۱۶ ٹن ہے اور وہ چکنی ریل کی سڑک پر کھڑی ہے۔ ایک گھوڑا ریل کی سمت میں ایک ہنڈرڈ ویٹ وزن کی قوت کے ساتھ گاڑی کو یکساں کھینچتا ہے۔ دریافت کرو کہ ایک منٹ میں گاڑی کتنی دور جائے گی؟

(۱۵) ۱۰ گرام کے وزن کی ایک قوت ۲۷ گرام کی مقدار مادہ پر ایک سیکنڈ عمل کرتی ہے۔ رفتار محصلہ اور طے شدہ فاصلہ معلوم کرو۔ اور اگر ایک سیکنڈ کے بعد قوت کا عمل مسدود ہو جائے تو معلوم کرو کہ اس وقت سے شمار کرکے ایک منٹ میں جسم کتنی دور جائیگا؟

(۱۶) ایک کیلو گرام کے وزن کی قوت ایک جسم پر ۱۰ سیکنڈ مسلسل عمل کرتی ہے اور اتنے وقت میں جسم ۱۰ میٹر طے کرتا ہے۔ جسم کی مقدار مادہ دریافت کرو۔

(۱۷) ایک چکنی افقی سطح پر ایک ۹ پونڈ وزن کی قوت ایک جسم پر عمل کرتی ہے۔ ۲۵ فٹ طے کرنے کے بعد جسم کی رفتار محصلہ ۱۰ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ جسم کی کمیت مادہ دریافت کرو۔

(۱۸) ایک جسم ایک چکنی میز پر پڑا ہے اور ایک ۶ پونڈ وزن کی قوت اس پر مسلسل عمل کرتی ہے۔ ۳ سیکنڈ کے بعد جسم کی رفتار ۴۸ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ جسم کی مقدار مادہ دریافت کرو۔

(۱۹) ۳ پونڈ مقدار مادہ کا ایک جسم جاذبۂ ارض کے زیر عمل ۱۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے گر رہا ہے۔ اس یکساں قوت کی مقدار دریافت کرو جو اسے (۱) ۲ سیکنڈ میں (۲) ۲ فٹ فاصلہ طے کرنے میں، ساکن کر دے۔

(۲۰) ایک قوت ۵ پونڈ کی مقدار مادہ پر $\frac{1}{11}$ ثانیہ عمل کرکے اس میں ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار پیدا کرتی ہے اور ایک دوسری قوت ۶۲۵ پونڈ کی مقدار مادہ پر ایک منٹ عمل کرکے اس میں ۱۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار پیدا کرتی ہے۔ دونو قوتوں کا مقابلہ کرو۔

(۲۱) ایک جسم جس کی کمیت مادہ ۱۰ پونڈ ہے حالتِ

سکون سے ۱۰ فٹ گرتا ہے اور پھر ایک فٹ ریت میں گھس کر ساکن ہو جاتا ہے ۔ جسم پر ریت کا اوسط دباؤ معلوم کرو ۔

(۲۲) ایک توپ کی نالی کا طول ۲۰۰ سینٹی میٹر ہے اور اس کے ذریعہ ایک گولہ جس کی مقدار مادہ ۱۰۰۰ گرام ہے ۴۵۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا جاتا ہے ۔ ثابت کرو کہ توپ چلنے کے وقت گولے پر عمل کرنے والی اوسط قوت $5{,}0625 \times 10^9$ ڈائین ہے ۔

(۲۳) ایک توپ میں ۱۰۰ پونڈ کمیت مادہ کا گولہ پڑتا ہے ۔ اگر توپ کے منہہ سے ایک فٹ کاٹ دیا جائے تو گولے کی رفتار ۱۴۹۰ فٹ فی ثانیہ سے بدل کر ۱۳۳۰ فٹ فی ثانیہ رہ جاتی ہے ۔ ثابت کرو کہ بارود کی قوت گولے پر تقریباً ۳۱۵ ٹن وزن کے برابر ہے ۔

(۲۴) ایک گولی جو ۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلتی ہے ایک لکڑی میں ۹ انچ گھس جاتی ہے ۔ اگر ایک اور گولی اسی رفتار سے چلتی ہوئی اسی قسم کی پانچ انچ موٹی لکڑی میں گھسے تو دریافت کرو کہ کتنی رفتار سے وہ دوسری طرف نکلے گی ۔ لکڑی کی مزاحمت یکساں فرض کرلی جائے ۔

(۲۵) ایک موٹر کار ۴۰ کیلومیٹر فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے اور بریک لگاکر اسکو ۴ سیکنڈ میں ساکن

کردیا جاتا ہے۔ ثابت کروکہ اس مقام سے جہاں بریک لگائے گئے ہیں ۲۲ میٹر چل کر موٹر کار ساکن ہو گی اور یہ بھی ثابت کروکہ بریکوں کی قوت موٹر کار کے وزن کا ۲۸۳ء گنا ہے۔

نیز یہ بھی کہ یہ قوت موٹر کار کو ایک ایسی سطح مائل پر ساکن رکھ سکتی ہے جس کا میلان ۱/۲ ۳ میں ایک ہو۔

(۶۷) پونڈل اور ڈائین **مطلق اکائیاں** کہلاتی ہیں کیونکہ ان کی قیمت ج کی قیمت پر منحصر نہیں ہے۔ ج کی قیمت روئے زمین کے مختلف مقامات پر مختلف ہے۔ چونکہ پونڈ اور گرام کے وزن ج کی قیمت پر منحصر ہیں اس لئے ان کو **تجاذبی اکائیاں** کہتے ہیں۔

(۶۸) کسی جسم کا وزن اس کی مقدارِ مادہ کے متناسب ہے اور اس کا انحصار مادہ کی قسم پر نہیں ہے۔

اگر ہمارے پاس ایک ہوابند قابلہ ہو جو ہوا سے بالکل خالی ہو اور اس میں ایک ہی بلندی سے ایک ہی وقت مختلف اقسام کے مادوں کے اجسام نیچے گرنے کے لئے چھوڑے جائیں مثلاً دھات کا ٹکڑا، کسی پرندے کا پر، کاغذ کا پرزہ وغیرہ۔ تو ان کی حرکت کا ملاحظہ کرنے سے معلوم ہوگا کہ تمام چیزیں ایک ساتھ گرتی ہیں۔ اور ایک سے فاصلے طے کرتی ہوئی ایک ساتھ قابلہ کی تہ پر پہنچتی ہیں خواہ ان کو کسی بلندی سے چھوڑا جائے اور خواہ کسی

قسم کے مادے ہوں ۔ چونکہ یہ اجسام ایک وقت میں مساوی فاصلے طے کرتے ہیں اس لئے ان کی رفتاریں (نقل مکان کی شرحیں) اور ان کے اسراع (تبدل رفتار کی شرحیں) ہمیشہ برابر ہونگی ۔

طالب علم بغیر خلا پیدا کرنے کے تجربہ بالا تقریباً کرسکتا ہے ۔

ایک پیسہ اور ایک ہلکی چیز مثلاً کاغذ کا پرزہ لو ۔ کاغذ کے پرزے کو پیسے پر جماکر رکھدو اور ان کو افقی وضع میں پکڑ کر نیچے چھوڑ دو تو وہ دونو اکٹھے ہی نیچے گرینگے ۔ حالانکہ اگر ان کو علیحدہ علیحدہ ایک ساتھ چھوڑا جائے تو پیسہ کاغذ سے بہت پہلے زمین پر پہنچیگا ۔ پیسہ کاغذ کے راستے سے ہوا کو ہٹا دیتا ہے اور حرکت ویسے ہی ہوتی ہے جیسے کہ گویا ہوا نہیں ہے ۔

اب فرض کرو کہ دو اجسام کے وزن $و_1$ اور $و_2$ پونڈ ہیں اور ان کی کمیت مادہ $م_1$ اور $م_2$ ہیں ۔ تو چونکہ ان کے اسراع مساوی ہیں اور ج کے برابر ہیں

اس لئے $$و_1 = م_1 ج$$

اور $$و_2 = م_2 ج$$

$$\therefore و_1 : و_2 :: م_1 : م_2$$

یعنی کسی جسم کا وزن اُس کی مقدار مادہ کے متناسب ہے ۔

پس جن اجسام کے وزن برابر ہیں ان میں ایک ہی سی مقدار مادہ ہوگی۔
اس لئے اگر دو اجسام کی کمیت مادہ کی نسبت معلوم ہو تو ان کے اوزان کی نسبت بھی معلوم ہو گئی۔
مساوات و = م ج ایک عددی مساوات ہے۔ اس کا مطلب یہ ہے کہ جسم کے وزن میں قوت کی اکائیوں کی تعداد دو عددوں کے حاصل ضرب کے مساوی ہے۔ ایک، جسم کی کمیت مادہ کی اکائیوں کی تعداد اور دوسرا اس اسراع کی اکائیوں کی تعداد جو جسم کا وزن اس میں پیدا کرے۔
بذریعہ دفعہ ۶۱ و دفعہ ہذا $\frac{ق}{و} = \frac{ع}{ج}$ یعنی ایک قوت کی ایک جسم کے وزن سے وہی نسبت ہے جو دو اسراعوں کی آپس میں نسبت ہے ایک اسراع وہ جو اس جسم میں اس قوت کے زیر عمل پیدا ہو اور دوسرا اسراع وہ جو وزن کے زیر عمل اسی جسم میں پیدا ہو بعض مولفین ق اور ع کے تعلق کو صورت بالا میں ادا کرتے ہیں۔

(۶۹) مقدار مادہ اور وزن کا فرق۔ طالب علم کو چاہئے کہ کسی جسم کے وزن اور مقدارِ مادہ کے فرق کو بخوبی سمجھے۔ چونکہ اجسام کی مقادیر مادہ کا اندازہ عادتاً بذریعہ ان کے اوزان کے کیا جاتا ہے اس لئے

ان کا فرق غالباً طالب علم کو معلوم نہیں ہے حالانکہ یہ دو نو بالکل مختلف ہیں۔ فرض کرو کہ توپ کا ایک گولہ عین زمین کے مرکز پر پڑا ہے تو وہاں وہ بالکل بے وزن ہوگا کیونکہ زمین کی قوت جاذبہ عین اس کے مرکز پر صفر ہے۔ لیکن توپ کے گولے کا مادہ وہاں موجود ہے۔ اگر توپ کا گولہ وہاں حرکت میں ہو تو اس کو ساکن کرنے کے لئے اتنی ہی قوت مطلوب ہوگی جتنی کہ سطح زمین پر مماثل حالات میں مطلوب ہو۔ اس سے ظاہر ہے کہ کسی جسم کے وزن کا بالکل معدوم ہونا ممکن ہے لیکن اس کا مادہ ویسے کا ویسا ہی رہتا ہے۔

اس اختلاط کی وجہ غالباً یہ ہے کہ "پونڈ" کا لفظ دو معنوں میں استعمال ہوتا ہے جو علمی حیثیت سے مختلف ہیں۔ "پونڈ" کا لفظ "ایک پونڈ کی مقدار مادہ" کے معنوں میں بھی استعمال ہوتا ہے اور "ایک پونڈ کا وزن" بھی اس سے مراد ہوتا ہے۔ لیکن طالب علم کو خاص طور پر یہ بات ذہن نشین کرلینی چاہئے کہ لفظ "پونڈ" کے اصلی معنے "ایک پونڈ کی مقدار مادہ" ہی ہے۔ اور جب ہم اس قوت کا ذکر کرنا چاہیں جس سے زمین اس مقدار مادہ کو اپنی طرف کھینچتی ہے تو ہمیں "ایک پونڈ کا وزن" کہنا چاہئے۔

اکثر اوقات اسی " ایک پونڈ کے وزن " کو مختصراً " ایک پونڈ " کہا جاتا ہے لیکن اس بات کی احتیاط لازمی ہے کہ اس جملے سے اصلی مراد کیا ہے۔

یہ بات بھی قابل ذکر ہے کہ جملہ " سیسے کا ایک گولہ وزنی ۲۰ پونڈ " فی الحقیقت ذیل کے جملے کا اختصار ہے۔ " سیسے کا ایک گولہ جس کا وزن ۲۰ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے " سیسے کی مقدارِ مادہ ۲۰ پونڈ ہے اور اس کا وزن ۲۰ ج پونڈل ہے۔

(۷۰) پلڑوں والی ترازو اور کمانی دار ترازو سے تولنے کا فرق۔ دفعہ ۴۲ میں ہمیں یہ معلوم ہو چکا ہے کہ روئے زمین کے ایک مقام سے دوسرے مقام پر جانے میں اسراع بجاذبۂ ارض یعنی ج کی قیمت قدرے بدل جاتی ہے۔ جب ہم کوئی چیز مثلاً چائے پلڑوں والی ترازو سے تولتے ہیں۔ تو ہم چائے ایک پلڑے میں ڈالتے ہیں اور باٹ دوسرے پلڑے میں۔ اور چائے کو کم زیادہ کرتے ہیں جبتک چائے کا وزن ان معلومہ باٹوں کے وزن کے برابر نہ ہو جائے۔ اور بذریعہ دفعہ ۶۸ یہ ظاہر ہے کہ چائے کی مقدارِ مادہ باٹوں کی مقدارِ مادہ کے برابر ہے۔پس پلڑوں کی ترازو کے ذریعے مقادیر مادہ ناپی جاتی ہیں نہ کہ اوزان۔ اس لئے چائے کا وزن روئے زمین

کے ہر مقام پر ایک ہی سا معلوم دیگا اگر پلڑوں کی ترازو سے تولا جائے۔

لیکن جب ہم چائے کو کمانی دار ترازو کے ذریعے تولتے ہیں۔ تو ایسے ترازو کے کانٹے کے ساتھ لٹکاکر دیکھتے ہیں کہ چائے کے وزن سے کمانی کہاں تک کھچ گئی یعنی چائے کا وزن اس قوت کے مساوی ہے جو کمانی کو وہاں تک کھینچنے کے لئے درکار ہے۔ اگر اس ترازو اور اس چائے کو دوسری جگہ مثلاً لندن پیرس لیجائیں۔ تو چائے کا وزن مختلف ہوگا لیکن ترازو کی کمانی کو اتنا ہی کھینچنے کے لئے اتنی ہی قوت مطلوب ہوگی۔ اس لئے چائے کا وزن کمانی کو مختلف مقام تک کھینچے گا یعنی کمانی دار ترازو سے تولنے میں چائے کا وزن مختلف معلوم دیگا۔

اگر دو مقامات ا اور ب ایسے ہوں کہ ا پر ج کی قیمت دوسرے مقام پر ج کی قیمت سے زیادہ ہو تو ا پر چائے کی ایک دی ہوئی مقدار کا وزن کمانی دار ترازو سے تولنے میں دوسرے مقام پر کے وزن سے زیادہ ہوگا۔

مثال (۱) خط استوا پر ج کی قیمت ۳۲٫۰۹ ہے اور لندن میں ۳۲٫۲ ، ایک سود اگر خط استوا پر ایک شلنگ فی پونڈ کے حساب سے چائے خریدتا ہے

اور لندن میں فروخت کرتا ہے۔ اگر وہ دونو مقاموں پر خرید و فروخت کے لئے ایک ہی کمانی دار ترازو استعمال کرے تو دریافت کرو کہ لندن میں کس قیمت پر وہ چائے فروخت کرے کہ اس کو نفع ہو نہ نقصان

چائے کی جس مقدار کا وزن خط استوا پر ایک پونڈ کا وزن ہے لندن میں اس کا وزن $\frac{۳۲،۲}{۳۲،۰۹}$ پونڈ کے وزن کے مساوی ہوگا۔ پس اس کو چاہئے کہ ایک شلنگ میں $\frac{۳۲،۲}{۳۲،۰۹}$ پونڈ چائے دے

یعنی $\frac{۳۲۰۹}{۳۲۲۰}$ شلنگ فی پونڈ

مثال (۲) ایک مقام ا پر ج ۳۲،۲۴ ہے اور دوسرے مقام ب پر ج کی قیمت ۳۲،۱۲ ہے ایک سوداگر ا پر دس پونڈ فی ہنڈرڈ ویٹ کے حساب سے کچھ سامان خریدتا ہے اور ب پر فروخت کرتا ہے اور خرید اور فروخت دونو میں ایک ہی کمانی دار ترازو استعمال کرتا ہے۔ اگر اس کو ۲۰ فیصدی نفع ہو تو ثابت کرو کہ اس کی قیمت فروخت ۱۲ پونڈ $\frac{۳}{۸}$ ۱۰ پنس فی ہنڈرڈ ویٹ ہے۔

(۱۷) قوتوں کا طبیعی استغنا۔ قانون دوم کا آخری حصہ یہ بیان کرتا ہے کہ حرکت کی تبدیلی جو کسی قوت کی وجہ سے ہوتی ہے وہ قوت کے خطِ عمل کی سمت میں ہوتی ہے۔

فرض کرو کہ ایک ذرہ سمت اب میں حرکت کر رہا ہے اور ایک قوت سمت اج میں اس پر عمل کرتی ہے تو اس قانون کا یہ مطلب ہے کہ سمت اب میں رفتار میں کوئی تبدیلی واقع نہیں ہوتی اور رفتار میں جو تبدل واقع ہوتا ہے وہ صرف سمت اج ہی میں ہوتا ہے اس لئے اگر وقت کی ایک اکائی کے اختتام پر ہم اصلی رفتار معلوم کرنا چاہیں تو ہمیں دو رفتاروں کی آپس میں ترکیب کرنی چاہئے۔ ایک تو وہ رفتار جو اب کی سمت میں ہے اور دوسری وہ رفتار جو وقت کی ایک اکائی میں قوت کے عمل کی وجہ سے سمت اج میں پیدا ہوئی۔ اب اگر کوئی اور قوت کسی اور سمت میں ذرہ پر عمل کرے تو یہی دلیل اس پر بھی عائد ہو سکتی ہے اور اسی طرح اگر بہت سی قوتیں عمل کریں تو ان پر بھی ایسی ہی دلائل عائد ہونگی۔ پس اگر کسی ساکن یا متحرک ذرے پر قوتوں کا ایک نظام عمل کرے تو ان کا مجموعی اثر اس طرح معلوم ہوگا کہ ذرے کو ساکن سمجھیں اور اس پر ہر ایک قوت کے اثر کا جداگانہ اندازہ کرتے ہوے باقی قوتوں کو کالعدم تصور کریں۔ اور پھر تمام قوتوں کے اثرات کی ترکیب کریں۔ قوتوں کے طبیعی استغنا کا اصول یہی ہے۔

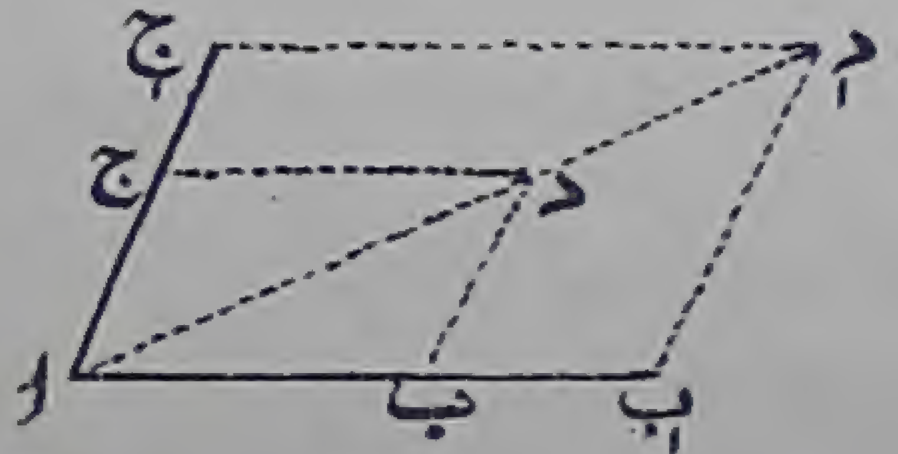
ہم اس اصول کی توضیح کے لئے ایک مثال دیتے ہیں
فرض کرو کہ ایک ریل گاڑی تیز جا رہی ہے اور اسمیں
ایک مسافر ایک گیند اپنے ہاتھ سے نیچے چھوڑتا ہے
تو گیند گاڑی کے فرش کے اسی مقام پر لگیگی جہاں
گاڑی کے ساکن ہونے کی حالت میں لگتی۔ اس سے
ثابت ہے کہ جس رفتار سے گاڑی چل رہی ہے اسی
رفتار سے گیند بھی ساتھ ساتھ چل رہی ہے۔ یا یوں
کہو کہ گیند کے وزن کی وجہ سے صرف سمت شاقولی
میں حرکت تبدیل ہوئی۔ اور گیند کے وزن کا اثر
گیند کی افقی رفتار پر کچھ نہیں ہوا۔

اب ایک اور مثال پر غور کرو۔ اگر دو چھوٹے
گولے ایک میز کے کنارے پر رکھے جائیں اور
اور ان کو اس طرح چوٹ لگائی جائے کہ دونو ایک ہی
وقت میز سے علیحدہ ہوں اور میز سے علیحدہ ہونے
وقت ان کی رفتاروں میں خواہ کتنا ہی فرق ہو۔ تو
دونو گولے ایک ہی وقت فرش پر لگین گے خواہ
ان کی مقادیر مادہ اور ان کی ابتدائی رفتاریں کچھ ہی
ہوں۔ اس سے ثابت ہے کہ دونو اجسام کے
شاقولی اسراع اور رفتاریں نہ تو ان کی مقادیر مادہ پر
منحصر ہیں اور نہ ان کی ابتدائی رفتاروں پر۔

ایک بازیگر کی مثال بھی ویسی ہی ہے جو گھوڑے پر

سوار ہو اور ایک حلقے میں سے کودنا چاہے۔ وہ گھوڑے کی پیٹھ پر سے سمت عمودی میں کودتا ہے۔ اس کی افقی رفتار وہی ہے جو گھوڑے کی ہے اور وہ بدستور اسوقت بھی جاری رہتی ہے جب وہ کود کر گھوڑے کی پیٹھ سے جدا ہوتا ہے۔ اس لئے جب وہ نیچے واپس آتا ہے تو عین گھوڑے کی پیٹھ پر اسی جگہ آ بیٹھتا ہے جہاں سے وہ کودا تھا۔

(۷۲) **قوتوں کا متوازی الاضلاع**۔ ہم نے دفعہ ۳۰ میں یہ ثابت کیا ہے کہ اگر ایک ذرے کے جس کی مقدار مادہ م ہو دو اسراع ع اور ع ہوں جو مقدار اور سمت میں خطوط اب اور اج سے تعبیر ہوں تو اس کا حاصل اسراع ع ہوگا جو مقدار اور سمت میں اد سے تعبیر ہوسکتا جہاں اد اس متوازی الاضلاع کا قطر ہے جس کے اضلاع متصلہ اب اور اج ہیں۔



چونکہ ذرے کا اسراع سمت اب میں ع ہے تو اس سمت میں قوت ق (= م ع) ہوگی۔ اسی طرح سمت اج میں قوت قٔ (= م عٔ) ہوگی۔ فرض کرو کہ اب اور اج ان قوتوں کو مقدار اور سمت میں تعبیر کرتے ہیں۔ متوازی الاضلاع اب د ج کی تکمیل کرو۔ تو چونکہ اب اور اج کی سمتوں میں جو قوتیں عمل کرتی ہیں وہ ان سمتوں کے اسراعوں کے متناسب ہیں اس لئے

اب : اب :: بٔ د : ب د

لہذا بذریعہ علم ہندسہ ا، د اور دٔ ایک ہی خطِ مستقیم میں ہیں۔

اور ∴ ادٔ : اد :: ابٔ : اب

اس سے ظاہر ہے کہ جو اسراع اد سے تعبیر ہوتا ہے اس کو پیدا کرنے والی قوت ادٔ سے تعبیر ہوگی۔ یعنی ادٔ اس قوت کو تعبیر کرتا ہے جو قوتوں ابٔ اور اجٔ کے مساوی ہے۔

پس قوتوں کے متوازی الاضلاع کا مسئلہ ثابت ہوا جو بالفاظ ذیل بیان ہو سکتا ہے۔

اگر ایک ذرے پر دو قوتیں عمل کریں جو مقدار اور سمت میں ایک متوازی الاضلاع کے دو اضلاع متصلہ سے تعبیر ہوں تو دونو ملکر ایک ایسی قوت کے مساوی ہونگی

جو مقدار اور سمت میں متوازی الاضلاع کے اس قطر سے تعبیر ہو گی جو ان دونو اضلاع کے نقطۂ اتصال میں سے گذرتا ہے۔

نتیجۂ صریح۔ اگر دفعات ۱۳ تا ۱۹ میں جو رفتاروں کے متوازی الاضلاع پر مبنی ہیں ہم لفظ "رفتار" کی بجائے لفظ "قوت" استعمال کریں تو بھی کل دفعات صحیح ہونگے۔

(۲۳) **قانون سوم**۔ ہر ایک قوتی عمل کے متساوی اور متقابل ایک جواب عمل ہوتا ہے۔

جہاں کہیں قوت لگائی جائے وہاں درحقیقت دو اجسام کے درمیان باہمی عمل ہوتا ہے اس باہمی عمل کو تعامل کہتے ہیں یعنی نیوٹن کا عمل اور جواب عمل دونو مل کر تعامل کہلاتے ہیں۔

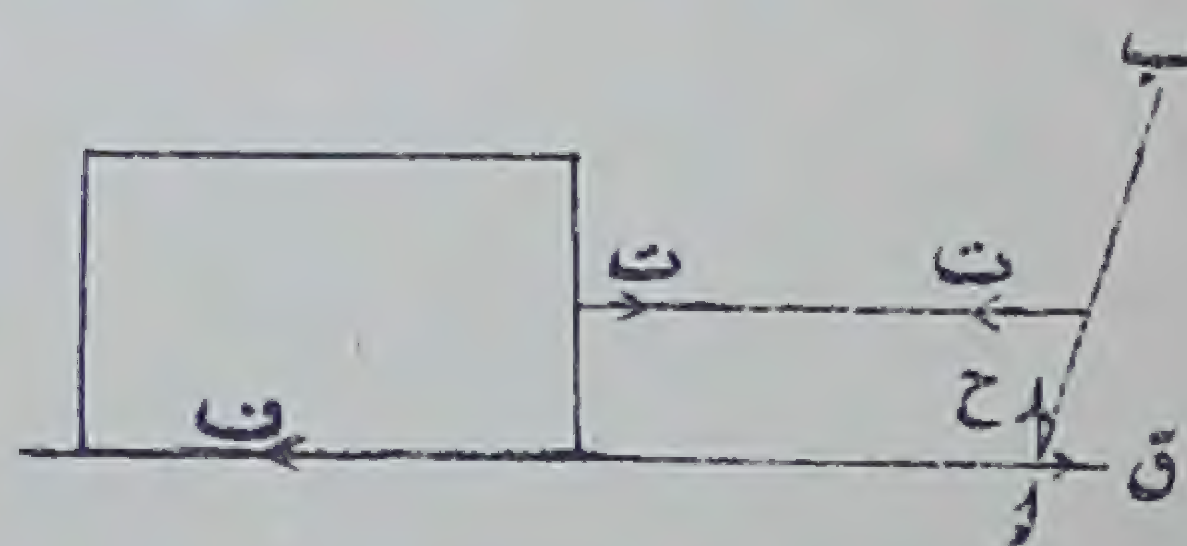
مثالیں

(۱) اگر ایک کتاب میز پر پڑی ہو تو جس قوت سے کتاب میز کو نیچے دباتی ہے اسی قوت سے میز کتاب کو اوپر دباتی ہے۔

(۲) اگر ایک شخص ایک وزن رسی میں باندھکر اسے اٹھائے تو رسی ایک طرف تو وزن کو ایک خاص قوت سے اوپر کو کھینچتی ہے اور دوسری طرف اس شخص کے ہاتھ کو اسی قوت سے نیچے کو کھینچتی ہے۔

(۳) جس قوت سے زمین کسی جسم کو اپنی طرف کھینچتی ہے وہ اس جسم کا وزن ہے۔ اسی قوت سے وہ جسم بھی زمین کو اپنی طرف کھینچتا ہے۔

(۴) جب ایک آدمی کسی وزنی جسم کو رسی کے ذریعہ زمین پر کھینچتا ہے تو رسی جس قوت سے جسم کو آگے کی طرف کھینچتی ہے اسی قوت سے آدمی کو پیچھے کی طرف کھینچتی ہے (رسی کا وزن نظر انداز کیا گیا ہے)



شکل میں اب آدمی کے جسم کا مرکزی خط ہے۔ ق اور ح وہ افقی اور عمودی قوتیں ہیں جن سے زمین اس کے پاؤں کو دباتی ہے اور جو ان قوتوں کے متساوی اور متقابل ہیں جن سے پاؤں زمین کو دباتے ہیں۔ ت رسی کا تناؤ ہے جو اس کے سروں پر متقابل سمتوں میں عمل کرتا ہے۔ اور ف وہ افقی قوت ہے جو زمین اور جسم کے درمیان ہے۔

آدمی حرکت کرتا ہے کیونکہ ق < ت

جسم حرکت کرتا ہے کیونکہ ت < ف

یعنی ابتداءِ حرکت میں ق < ت < ف

جب آدمی اور جسم یکساں حرکت کر رہے ہوں تو یہ تینوں قوتیں برابر ہونگی۔

(۵) اگر ربڑ کے ایک تسمے کو ایک آدمی دونو ہاتھوں سے کھینچ کر لمبا کرے تو جس قوت سے تسمہ ایک ہاتھ کو کھینچے گا اسی قوت سے دوسرے ہاتھ کو کھینچے گا۔

دو ریل گاڑیوں کے درمیان جو گدّیاں ہوتی ہیں وہ ایک گاڑی کو اسی قوت سے دھکیلتی ہیں جس قوت سے دوسری گاڑی کو۔

باب پنجم

قوانین حرکت (مسلسل)

آسان سوالات کے حل میں انکا استعمال

(۷۴) دو ایسے ذرات کی حرکت جو ایک رسی سے مربوط ہیں۔

دو ذرے جن کی مقادیر مادہ م۱ اور م۲ ہیں ایک ہلکی رسی کے سروں سے بندھے ہیں اور رسی ایسی ہے کہ کھینچنے سے اس کا طول نہیں بڑھتا۔ رسی ایک چھوٹی ثابت چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔

اگر م۱ > م۲ تو اس نظام کی حرکت معلوم کرو اور رسی کا تناؤ بھی دریافت کرو۔



فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت پونڈل ہے۔

چونکہ چرخی چکنی ہے اس لئے رسی کا تناؤ اس کے طول کے ہر ایک مقام پر یکساں ہے۔

چونکہ کھنچنے سے رسی کا طول نہیں بڑھتا اس لئے $ھم_۱$ کی حرکت اوپر کی طرف ہرآن وہی ہوگی جو $ھم_۱$ کی حرکت نیچے کی طرف۔

پس ان کے اسراع (تبدلِ رفتار کی شرحیں) مقدار میں مساوی ہونگی۔

فرض کروکہ مشترکہ اسراع ع ہے

$ھم_۱$ پر نیچے کی طرف عمل کرنے والی قوت ($ھم_۱$ ج - ت) پونڈل ہے

لہذا $ھم_۱ ج - ت = ھم_۱ ع$ .... (۱)

اسی طرح $ھم_۲$ پر اوپر کی طرف عمل کرنے والی قوت (ت - $ھم_۲$ ج) پونڈل ہے

$\therefore ت - ھم_۲ ج = ھم_۲ ع$ .... (۲)

(۱) اور (۲) پر عمل جمع کرنے سے

$$ع = \frac{ج\,(ھم_۱ - ھم_۲)}{ھم_۱ + ھم_۲}$$ جو مشترکہ اسراع ہے

چونکہ اسراع معلوم ہے اور غیر متبدل ہے اس لئے دفعہ ۳۲ کی مساواتوں کے ذریعہ ایک مدت معلومہ میں طے شدہ فاصلہ اور رفتارِ محصلہ معلوم ہوسکتی ہے۔

تجربہ۔ نتیجہ بالا کے استعمال سے ج کی قیمت کا تقریبی حساب ہوسکتا ہے اگر ہم چرخی کی فرک وغیرہ کا لحاظ کریں۔ ایک ہلکی چرخی زمین سے مناسب بلندی پر اس طرح نصب

کرو کہ دونو جسموں کا طے کردہ فاصلہ ناپا جا سکے - چرخی پر ایک ہلکی رسی چڑھاؤ جس کے سروں سے دو جسم بندھے ہوں جن کی کمیت مادہ مساوی ہو (دفعہ ۸۲ میں جو شکل ہے جسم ہیں وہ موزوں ہیں) تجربے سے جسم ح معلوم کرو جس کو ایک طرف کے جسم ط پر رکھنے سے وہ جسم بہت آہستہ اور یکساں رفتار سے نیچے کو اترے یہ جسم ح عموماً چھوٹا ہوتا ہے ہم اسے نظر انداز کرینگے۔ اب اسی جسم ط پر ایک اور جسم ق ایسا رکھو کہ اس میں زمین کی طرف اسراع ع سے حرکت پیدا کرے - اسراع ع ضابطہ مندرجہ بالا سے معلوم ہوگا کیونکہ $م_1 = ط + ق$ اور $م_2 = ط$

$$\therefore ع = \frac{ج(م_1 - م_2)}{م_1 + م_2} = \frac{ق\,ج}{2ط + ق}$$

فاصلہ ف جو جسم نے طے کیا ناپو اور جتنی مدت و میں یہ فاصلہ طے ہوا وہ بھی معلوم کرو - تو

$$ف = \frac{1}{2} ع\, و^2 = \frac{1}{2} \frac{ق}{2ط + ق} ج\, و^2$$

اس مساوات میں سوائے ج کے سب مقادیر معلوم ہیں لہذا ج کی قیمت بھی معلوم ہو سکتی ہے۔

ایک تجربے میں ہم نے ایلومینم کی ہلکی چرخی استعمال کی تھی اور ط ۲۶۵ گرام تھا دفعہ ۸۲ کے جسم ق کی شکل کا ایک ۴ گرام کا جسم ط پر رکھنے سے بہت ہی آہستہ حرکت پیدا ہوئی یعنی اس جسم کا وزن رگڑ کی مزاحمت پر عین غالب آیا۔

ایک زائد جسم ۹ گرام کا رکھنے سے حرکت باسراع پیدا ہوئی اور ۵،۵ ثانیوں میں ۸ فٹ کا فاصلہ طے ہوا [یہ وقت بذریعہ ایک روک گھڑی کے صحیح طور پر معلوم ہو سکتا ہے۔ اگر ایک معمولی گھڑی ایسی ہو جو ایک سیکنڈ میں چار دفعہ آواز دے اس کو کان کے ساتھ لگانے سے بھی وقت ٹھیک معلوم ہو سکتا ہے۔ کئی دفعہ تجربہ کر کے اوسط لینا چاہئے]

اگر ہم ۴ گرام کو نظر انداز کریں جو فرک کو مغلوب کرنے کے لئے استعمال کیا گیا تھا تو م۱ = ۲۶۵ + ۹ اور م۲ = ۲۶۵

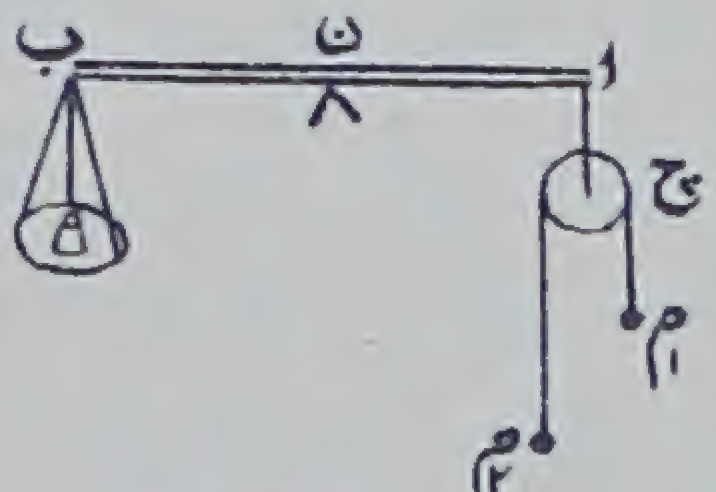
$$\therefore \quad ع = \frac{۹}{۵۳۹} ج$$

$$پس \quad ۸ = \frac{۱}{۲} \frac{۹ ج}{۵۳۹} (۵،۵)^۲$$

$$\therefore \quad ج = \frac{۴ \times ۵۳۹ \times ۲ \times ۸}{۱۲۱ \times ۹} = ۳۱،۷ \quad تقریباً$$

اس تجربے سے یہ اچھا خاصہ نتیجہ ہے۔

مساوات (۳۱) مندرجہ بالا میں تناؤ ت کی جو قیمت معلوم ہوئی اس کی تصدیق بذریعہ تجربہ ذیل ہوسکتی ہے۔



ایک یکساں سلاخ ا ب اپنے نقطہ وسط ن کے گرد گھوم سکتی ہے اس کے سرے ب سے ایک پلڑا لٹکتا ہے اور دوسرے سرے ا سے ہمارے تجربہ بالا کی چرخی لٹکتی ہے۔ اگر دوران حرکت میں چرخی چ ساکن ہو تو رسی ا ج کا تناؤ بذریعہ مساوات (۳)

۲ ت + چرخی چ کا وزن = (۴ م۱ م۲ / م۱ + م۲) ج + چرخی کا وزن =

پس اگر سلاخ ا ب کو افقی رکھنا مطلوب ہو تو پلڑے میں ایسے اوزان رکھنے چاہئیں جو اس تناؤ سے متوازن ہوں۔

عددی مثال۔ م۱ = ۷۰ اور م۲ = ۳۰ گرام لو۔ فرض کرو کہ چرخی کی مقدار مادہ ۴۰ گرام ہے اور پلڑے کی

۱۰ گرام ۔
دوران حرکت میں

$$۲\,ت = \frac{۴ \times ۷۰ \times ۳۰}{۷۰ + ۳۰}$$ ج = ۸۴ گرام وزن

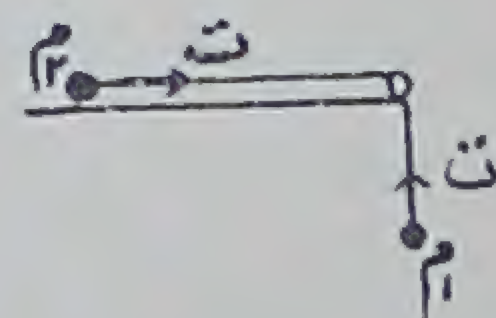
اس لئے پلڑے میں جو کل وزن رکھنا چاہئے وہ
= چرخی چ کا وزن + ۸۴ گرام - ۱۰ گرام = ۱۱۴ گرام
۱۱۴ گرام پلڑے میں رکھو اور چرخی چ کو پکڑو تاکہ گردش نہ کرے لیکن ا ن ب افقی رہے ۔ اب م۱ اور م۲ کو حرکت کرنے دو ۔ تو جتنی دیر حرکت جاری رہیگی سلاخ بھی افقی رہے گی ۔ اس سے ثابت ہے کہ اچ کا تناؤ ۱۲۴ گرام وزن ہے جیسا حساب سے معلوم ہوا ۔

اگر رسی چرخی کی نالی پر سے اتار دی جائے تاکہ حرکت نہ ہو تو پلڑے میں جو وزن رکھے جائیں وہ
= چ اور م۱ اور م۲ کے وزن - پلڑے کا وزن
= ۴۰ + ۷۰ + ۳۰ - ۱۰ = ۱۳۰ گرام وزن

پس یہ ثابت ہوا کہ جب حرکت ہوتی ہے تو رسی کا تناؤ کم ہوتا ہے اور جب حرکت نہیں ہوتی تو تناؤ زیادہ ہوتا ہے ۔

(۵۷) دو ذرے جن کی مقادیر مادہ م۱ اور م۲ ہیں ایک ہلکی رسی سے بندھے ہیں جو کھینچنے سے بڑھ

نہیں سکتی۔ م$_2$ ایک چکنی میز پر رکھا ہے اور رسی ایک ہلکی چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے جو میز کے کنارے پر نصب کی گئی ہے اور م$_1$ آزادانہ لٹکتا ہے۔ م$_1$ اور م$_2$ کی حرکت معلوم کرو



فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت پونڈل ہے۔

میز پر م$_2$ کی رفتار اور اسراع افقی سمت میں مساوی ہونگے م$_1$ کی رفتار اور اسراع کے جو سمت شاقولی میں ہیں۔

فرض کرو کہ اسراع مشترکہ ع ہے۔

م$_1$ پر نیچے کی طرف عمل کرنے والی قوت م$_1$ ج ـ ت ہے۔

∴ م$_1$ ج ـ ت = م$_1$ ع ......(۱)

م$_2$ پر افقی سمت میں عمل کرنے والی قوت صرف تناؤ ت ہے (کیونکہ م$_2$ کا وزن میز کے جوابی عمل کے ساتھ متوازن ہے)

∴ ت = م$_2$ ع ......(۲)

مساوات (۱) و (۲) پر عملِ جمع کرنے سے

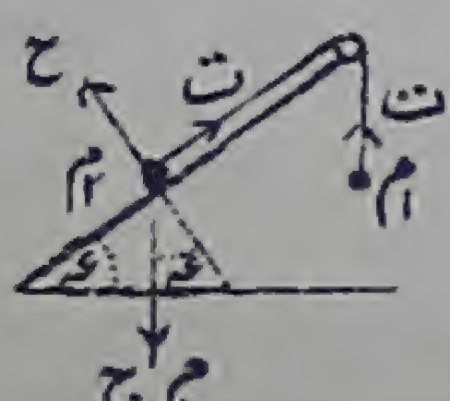
$$م_1 ج = (م_1 + م_2) ع$$

$$\therefore ع = \frac{م_1}{م_1 + م_2} ج$$ جو اسراع مطلوبہ ہے

اس لئے بذریعہ (۲) $ت = \frac{م_1 م_2}{م_1 + م_2} ج$ پونڈل

= ایک ایسے جسم کا وزن جس کی مقدار مادہ $\frac{م_1 م_2}{م_1 + م_2}$ ہے

(۷۶) دو جسم جن کی مقادیر مادہ $م_1$ اور $م_2$ ہیں ایک رسی سے مربوط ہیں $م_2$ ایک سطح مائل پر رکھا ہے جس کا میلان افق سے عہ ہے۔ سطح مائل کی چوٹی پر ایک چرخی ہے جس پر سے رسی گذر کر دوسری طرف $م_1$ کو سہارتی ہے جو سمت شاقولی میں لٹکتا ہے۔ اگر $م_1$ نیچے کی طرف اترے تو $م_1$ اور $م_2$ کی حرکت دریافت کرو۔



فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت پونڈل ہے۔ یہ ظاہر ہے کہ $م_2$ کی رفتار اور اسراع سطح کے اوپر کی طرف بالترتیب مساوی

ہیں م_1 کی رفتار اور اسراع کے شاقولی سمت میں۔
فرض کرو کہ یہ مشترکہ اسراع ع ہے۔
م_1 کی حرکت کے لئے

$$\text{م}_1\,\text{ج} - \text{ت} = \text{م}_1\,\text{ع} \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

م_2 کا وزن $\text{م}_2\,\text{ج}$ نیچے کی طرف سمت شاقولی میں عمل کرتا ہے

$\text{م}_2\,\text{ج}$ کا جزء تحلیلی سطح مائل کی عمود وار سمت میں سطح کے جوابی عمل ح کے ساتھ متوازن ہے کیونکہ م_2 کا اسراع سطح کی عمود وار سمت میں کچھ نہیں ہے۔ وزن کا جزء تحلیلی سطح مائل پر نیچے کی طرف $\text{م}_2\,\text{ج جب عہ}$ ہے اس لئے کل قوت سطح کے اوپر کی طرف $(\text{ت} - \text{م}_2\,\text{ج جب عہ})$ ہو گی۔

اس لئے $\text{ت} - \text{م}_2\,\text{ج جب عہ} = \text{م}_2\,\text{ع} \quad \ldots\ldots (2)$

(۱) و (۲) پر عمل جمع کرنے سے باآسانی

$$\text{ع} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2\,\text{جب عہ}}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ج}$$

(۱) میں ع کی قیمت رکھنے سے

$$\text{ت} = \text{م}_1(\text{ج} - \text{ع}) = \text{م}_1\,\text{ج}\left[1 - \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2\,\text{جب عہ}}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\right]$$

$$= \frac{\text{م}_1\,\text{م}_2\,(1 + \text{جب عہ})}{\text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ج}$$

جو رسی کا تناؤ ہے۔

امثلہ نمبری (۱۰)

(۱) ایک رسی جس کے سروں سے ۹ پونڈ اور ۶ پونڈ کمیت مادہ کے جسم بندھے ہوئے ہیں ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ اس نظام کی حرکت اور رسی کا تناؤ معلوم کرو۔

(۲) دو ذرے جن کی مقادیر مادہ ۷ پونڈ اور ۹ پونڈ ہیں ایک ہلکی رسی سے مربوط ہیں اور رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے۔ دریافت کرو (۱) مشترکہ اسراع (۲) رسی کا تناؤ (۳) رفتار باختتام ثانیہ پنجم (۴) فاصلہ طے شدہ در پنج ثانیہ۔

(۳) دو ذروں کی کمیت مادہ ۱۱ پونڈ اور ۱۳ پونڈ ہے دونوں ایک ہلکی سی رسی کے دونوں سروں میں بندھے ہوئے ہیں رسی ایک ہلکی چکنی چرخی پر چڑھا دی گئی ہے۔ دریافت کرو (۱) چار ثانیہ کے بعد رفتار (۲) چار ثانیہ میں طے شدہ فاصلہ۔ اگر چار ثانیہ کے بعد رسی کو کاٹ دیا جائے تو اس کے بعد ۶ ثانیہ میں ہر ایک ذرہ کتنا فاصلہ طے کرے گا؟

(۴) ۴۵۰ اور ۵۵۰ گرام کے دو جسم ایک ڈورے میں بندھے ہوئے ایک چکنی چرخی پر لٹکا دئے گئے ہیں۔

دریافت کرو کہ پہلے تین ثانیہ میں وہ کتنا فاصلہ طے کرینگے
اور رسی کا تناو کیا ہو گا؟

(۵) دو جسموں کی مقادیر مادہ ۵ پونڈ اور ۷ پونڈ ہیں۔
ان کو ایک رسی سے باندھکر ایک بے فرک چرخی پر
لٹکا دیا گیا ہے اور چرخی ایک کانٹے سے لٹکتی ہے۔
اگر حرکتِ اجسام کو نہ روکا جائے تو ثابت کرو کہ کانٹا
$\frac{2}{3}$ ۱۱ پونڈ وزن کی قوت سے نیچے کھچیگا۔

(۶) تین تین پونڈ کے دو مساوی جسم رسی سے باندھکر
ایک کھونٹی پر لٹکا دئے گئے ہیں۔ اگر تین پونڈ کا ایک
تیسرا جسم ان میں سے ایک پر رکھ دیا جائے تو دریافت
کرو کہ کھونٹی کے دباؤ میں کس قدر اضافہ ہو گا؟

(۷) دو مساوی جسم جن میں سے ہر ایک کی کمیت
ط ہے ایک رسی سے مربوط ہیں جو ایک کھونٹی پر سے
گذرتی ہے۔ ان میں سے ایک پر ایک تیسرا جسم
(کمیت ط) رکھ دیا گیا ہے۔ دریافت کرو کہ کھونٹی
پر کا دباؤ کس قدر زیادہ ہو جائے گا؟

(۸) دو جسم جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے
ایک رسی سے بندھے ہیں جو ایک چکنی چرخی پر سے
گذرتی ہے۔ دریافت کرو کہ ایک جسم میں سے کسقدر
مادہ نکال کر دوسرے جسم پر رکھدیا جائے کہ یہ نظام
پانچ سیکنڈ میں ۲۰۰ فٹ کا فاصلہ طے کرے۔

(۹) تین پونڈ کا ایک جسم سمت شاقولی میں نیچے کی طرف حرکت کر کے ایک رسی کے ذریعے جو ایک چرخی پر سے گذرتی ہے ایک دو پونڈ کے جسم کو اوپر کی طرف کھینچتا ہے۔ پانچ سیکنڈ کے بعد رسی ٹوٹ جاتی ہے۔ دریافت کرو کہ دو پونڈ کا جسم اور کتنا اونچا جائے گا؟

(۱۰) ۹ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک چکنی میز پر اس کے کنارے سے آٹھ فٹ کے فاصلے پر رکھکر رسی سے باندھ دیا گیا ہے اور رسی میز کے کنارے پر سے گذر کر دوسرے سرے پر ایک پونڈ کمیت کے جسم سے بندھی ہے۔ دریافت کرو

(۱) مشترکہ اسراع

(۲) کتنی مدت میں جسم میز کے کنارے پر پہنچیگا؟

(۳) میز پر سے گرتے وقت اس کی رفتار کیا ہو گی؟

(۱۱) ۳۵۰ گرام کمیت کا ایک جسم ایک چکنی میز پر اسکے کنارے سے ۲۴۵ء۲۵ سینٹی میٹر کے فاصلے پر رکھا ہے اور ایک ہلکی رسی کا ایک سرا اس جسم سے بندھا ہے اور پھر رسی میز کے کنارے پر سے گذر کر دوسری طرف پچاس گرام کے ایک جسم کو سہارتی ہے جو آزادانہ لٹکتا ہے۔ دریافت کرو کہ پہلا جسم کتنی مدت میں میز پر سے گر جائے گا؟

(۱۲) ایک ذرہ جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے ایک چکنی مائل

سطح پر رکھا ہے جس کا میلان افق سے °۳۰ ہے۔ ایک
رسی اس ذرے سے باندھکر سطح کی چوٹی پر سے گذاردی
گئی ہے اور اس کے دوسرے سرے پر ۳ پونڈ کمیت
کا ایک ذرہ باندھ دیا گیا ہے جو بلا تکلف لٹکتا ہے۔
دریافت کرو (۱) مشترکہ اسراع (۲) رسی کا تناؤ (۳) ۳ سیکنڈ
کے بعد رفتار (۴) ۳ سیکنڈ میں طے شدہ فاصلہ۔

(۱۳) ۴ پونڈ کمیت کا ایک ذرہ ایک مائل سطح کے پایہ
پر رکھا گیا ہے جس کا میلان افق سے °۴۵ ہے اور
طول ۷ فٹ ہے۔ اس ذرے سے رسی باندھکر سطح
کی چوٹی پر سے گذاری گئی ہے اور رسی کے دوسرے
سرے پر ۳ پونڈ کمیت کا ایک ذرہ بندھا ہے جو سمت
شاقولی میں لٹکتا ہے اس صورت میں مشترکہ اسراع دریافت
کرو اور یہ بھی معلوم کرو کہ پہلا ذرہ کتنے وقت میں سطح
کی چوٹی پر پہنچیگا؟

(۱۴) ایک سطح مائل کا طول اس کے ارتفاع سے دوگنا
ہے اس کی چوٹی پر ایک چرخی لگی ہے جس پر ایک رسی
گذرتی ہے۔ رسی کے ایک سرے سے ۱۲ پونڈ کمیت کا
ایک جسم بندھا ہے جو سطح مائل پر رکھا ہے اور دوسرے
سرے سے ۸ پونڈ کمیت کا ایک جسم بندھا ہے جو
نیچے لٹکتا ہے۔ دریافت کرو کہ ۵ سیکنڈ میں دونو جسم
کتنا فاصلہ طے کرینگے؟

(۱۵) ایک سطح مائل ایک میز کے ساتھ جوڑ کر اس طرح رکھی ہے کہ سطح مائل کی چوٹی میز کی سطح کے عین برابر ہے - ۶ اونس کمیت کا ایک ذرہ سطح مائل پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے اور پھسلنے میں ایک دوسرے ذرے کو جو میز پر ہے رسی کے ذریعہ ۵ سیکنڈ میں ۳ فٹ کھینچتا ہے - میز پر کے ذرے کی کمیت دریافت کرو۔

(۱۶) ایک چکنی چرخی پر سے رسی گذرتی ہے - اس کے ایک طرف ۴ اونس کمیت کا جسم بندھا ہے اور دوسری طرف ایک اس سے بڑا جسم بندھا ہے۔ دریافت کرو کہ بڑے جسم کی مقدار کیا ہونی چاہئیے اگر تین سیکنڈ حرکت جاری رہنے کے بعد رسی کاٹنے سے چھوٹا جسم $\frac{16}{9}$ فٹ اور اوپر جا سکے؟

(۱۷) ترازو کے دو پلڑے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ۳ پونڈ ہے ایک رسی سے باندھکر ایک چرخی پر چڑھا دئے گئے ہیں۔ دریافت کرو کہ ۱۲ پونڈ مادہ کے دو حصے کس طرح کرکے پلڑوں میں رکھے جائیں کہ بڑا حصہ پانچ سیکنڈ میں ۵۰ فٹ نیچے اترے؟

(۱۸) دو رسیاں ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہیں - ایک طرف وہ علیحدہ علیحدہ دو جسموں سے بندھی ہیں جن کی کمیت ۳ پونڈ اور ۴ پونڈ ہے اور دوسری طرف ۵ پونڈ کمیت کے ایک جسم سے مربوط ہیں۔ تو رسیوں کے

تناؤ اور نظام کا اسراع دریافت کرو۔

(۱۹) ایک رسی ایک چرخی پر چڑھی ہے اس کے ایک سرے سے ۱۰ پونڈ وزن بندھا ہے اور دوسرے سرے سے ۸ اور ۴ پونڈ کے اوزان بندھے ہیں۔ ۵ سیکنڈ کی حرکت کے بعد ۴ پونڈ کا وزن علیحدہ کردیا جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ کتنا مزید فاصلہ طے کرنے کے بعد وزن ساکن ہونگے؟

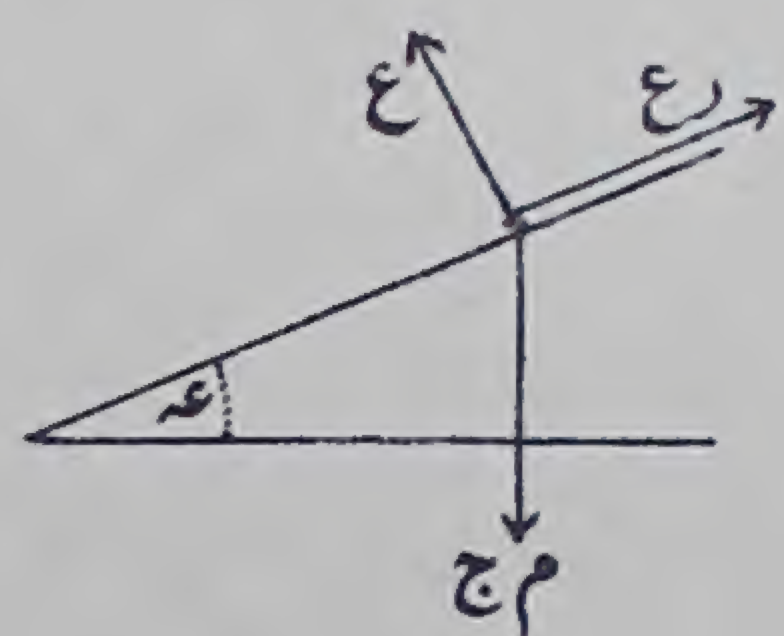
(۲۰) دو نا مساوی جسم ایک رسی سے باندھکر ایک چرخی پر چڑھا دئے گئے ہیں۔ ثابت کروکہ دوران حرکت میں چرخی کے محور کا دباؤ اس کے سہاروں پر جسموں کے مجموعۂ اوزان سے کم ہے۔

(۲۱) ایک رسی ایک چکنی میز پر اس کے دو مقابل کے کناروں پر عمودوار پڑی ہے اور اس کے سروں سے دو جسم بندھے ہیں جن کی کمیت ط اور ق ہے اور جو سمت شاقولی میں لٹکتے ہیں۔ اگر ایک جسم جس کی کمیت م ہو رسی کے اس حصے سے باندھ دیا جائے جو میز پر ہے تو ثابت کروکہ اس نظام کا اسراع $\frac{ط - ق}{ط + ق + م}$ ج ہوگا۔

(۷۷) ایک کھردری سطح پر حرکت۔ ایک ذرہ ایک کھردری سطح مائل پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔

اگر سطح کا میلان افق سے عہ ہو اور قدر فرک ر ہو تو حرکت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ ذرہ کی کمیت م ہے تو اس کا وزن م ج پونڈل ہوا۔ فرض کرو کہ سطح کا عمودی عمل ع ہے اور فرک رع ہے۔



سطح کی عمودی سمت میں کل قوت

= (ع - م ج جم عہ) پونڈل

سطح کے نیچے کی طرف کل قوت

= (م ج جب عہ - رع) پونڈل

چونکہ سطح کی عمودی سمت میں حرکت نہیں ہو سکتی اسلئے حرکت میں تبدیلی بھی نہیں ہو سکتی۔ یعنی اس سمت میں اسراع صفر ہے۔ لہذا اس سمت میں کل قوت بھی صفر ہو گی۔

∴ ع - م ج جم عہ = ... (۱)

نیز سطح کے نیچے کی طرف اسراع

= حرکت دینے والی قوت / مقدار مادہ جو حرکت دی گئی = (م ج جب عہ - ر ع) / م

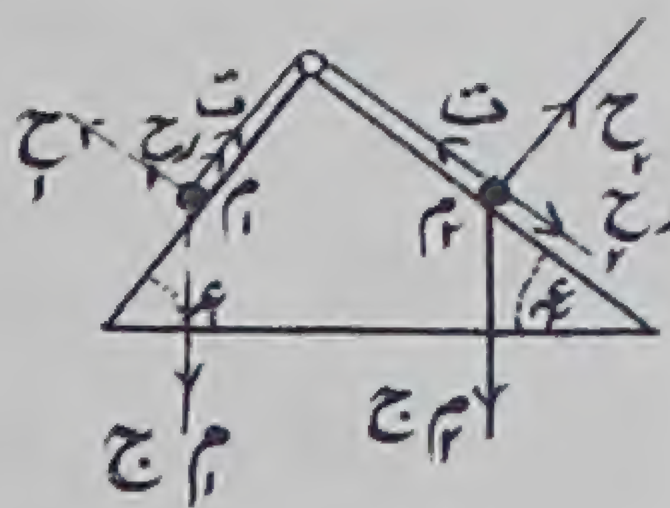
= ج (جب عہ - ر جم عہ) بموجب (۱)

پس اگر ذرہ حالت سکون سے شروع ہو کر سطح کا طول ل طے کرے تو اس صورت میں اس کی رفتار محصلہ بموجب دفعہ ۳۲ $\sqrt{}$ ۲ ج ل (جب عہ - ر جم عہ) ہوگی

اسی طرح اگر ذرہ سطح کے اوپر کی طرف پھینکا جائے تو ہمیں ر کی علامت بدلنی پڑے گی اور اس کا اسراع اسکی حرکت کے متقابل سمت میں ج (جب عہ + ر جم عہ) ہوگا۔

(۷۸) ایک سی کھردری دو مائل سطحوں کے ارتفاع مساوی ہیں اور ان کے میلان افق سے عہ$_1$ اور عہ$_2$ ہیں۔ دونو سطحوں کو جوڑ کر اس طرح رکھا گیا ہے کہ ان کی چوٹیاں ملتی ہیں۔ دو جسم م$_1$ اور م$_2$ جو ایک رسی سے بندھے ہیں دونو سطحوں پر رکھے گئے ہیں اور رسی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے جو سطحوں کی مشترکہ چوٹی پر لگی ہے۔ اگر م$_1$ نیچے کی طرف پھسلنا شروع کرے تو حرکت دریافت کرو۔

فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت ہے۔ اور فرض کرو کہ سطحوں کے عمل ح$_1$ اور ح$_2$ ہیں اور قدر فرک ر ہے۔



چونکہ $م_1$ کی حرکت نیچے کی طرف ہے اس لئے اس پر فرک اوپر کی طرف عمل کرتی ہے اور $م_2$ اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے اس لئے اس پر فرک کا عمل نیچے کی طرف ہے۔
لہذا $م_1$ پر نیچے کی طرف عمل کرنے والی کل قوت

$$= م_1 ج جب عہ_1 - ت - ر ح_1$$

$$= م_1 ج (جب عہ_1 - رجم عہ_1) - ت$$

پس اگر دونو ذروں کا مشترکہ اسراع ع ہو تو

$$م_1 ج (جب عہ_1 - رجم عہ_1) - ت = م_1 ع \quad ..... (۱)$$

اسی طرح $م_2$ پر اوپر کی طرف عمل کرنے والی کل قوت

$$= ت - ر ح_2 - م_2 ج جب عہ_2$$

$$= ت - م_2 ج (جب عہ_2 + رجم عہ_2)$$

لہذا

$$ت - م_2 ج (جب عہ_2 + رجم عہ_2) = م_2 ع \quad .... (۲)$$

(۱) اور (۲) کو جمع کرنے سے

$$ع (م_1 + م_2) = ج \left[م_1 (جب عہ_1 - رجم عہ_1) - م_2 (جب عہ_2 + رجم عہ_2) \right]$$

اس مساوات سے اسراع مطلوبہ حاصل ہوگا۔

(۷۹) ایک ریل گاڑی کی کمیت ۵۰ ٹن ہے۔ جس مائل سڑک پر گاڑی اوپر کی طرف جا رہی ہے اس کا میلان ۱۰۰ میں ایک ہے۔ انجن کی مستقل قوت ایک ٹن وزن کے مساوی ہے اور فرک وغیرہ کی مزاحمت فی ٹن ۸ پونڈ وزن کے برابر ہے۔ گاڑی کی حرکت کا اسراع دریافت کرو۔

حرکت کو روکنے والی قوتیں دو ہیں۔ ایک گاڑی کے وزن کا جزء تحلیلی سطح مائل کے نیچے کی طرف دوسری مزاحمتِ فرک وغیرہ۔

فرکی مزاحمت ۸ × ۵۰ یعنی ۴۰۰ پونڈ وزن کے برابر ہے

زاویہ میلان عہ ہے جہاں جب عہ = $\frac{۱}{۱۰۰}$

گاڑی کے وزن کا جزء تحلیلی سطح مائل کے نیچے کی طرف

= وزن × جب عہ = ۵۰ × ۲۲۴۰ × $\frac{۱}{۱۰۰}$ پونڈ وزن

= ۱۱۲۰ پونڈ وزن

پس جملہ قوت جو حرکت کو روکتی ہے = ۱۵۲۰ پونڈ وزن

لیکن انجن کی قوت ۲۲۴۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے

اس لئے چال کو بڑھانے والی قوت (۲۲۴۰−۱۵۲۰)

یعنی ۷۲۰ پونڈ وزن یا ۷۲۰ ج پونڈل کے مساوی ہے

مقدار مادہ جس کو حرکت دی جاتی ہے ۵۰ × ۲۲۴۰ پونڈ ہے۔

پس اسراع = $\frac{\text{۷۲۰ ج}}{\text{۵۰} \times \text{۲۲۴۰}} = \frac{\text{۹ ج}}{\text{۱۴۰۰}}$ فٹ ثانیہ اکائیاں

جب اسراع معلوم ہوگیا تو ہم بموجب دفعہ ۳۲ وقت مفروض میں حاصل شدہ رفتار اور طے شدہ فاصلہ معلوم کر سکتے ہیں۔

امثلہ نمبری (۱۱)

(۱) ۵ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک کھردری میز پر رکھا ہے اس سے ایک رسی بندھی ہے جو میز کے کنارے پر سے گذر کر دوسری طرف ۸ پونڈ کمیت کے ایک جسم کو سہارتی ہے۔ اگر قدر فرک $\frac{۱}{۲}$ ہو تو حاصل اسراع دریافت کرو۔

اگر اسراع آزادانہ گرنے والے جسم کے اسراع کا نصف ہو تو معلوم کروکہ قدرِ فرک کیا ہوگی؟

(۲) ایک جسم بکمیت ق ایک افقی میز پر جس کی قدر فرک $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ہے رکھا ہے۔ ایک دوسرا جسم جسکی کمیت ۳ ق ہے پہلے جسم سے ایک رسی کے ذریعہ وصل کیا گیا ہے۔ دوسرا جسم میز کے کنارے پر سے نیچے لٹکتا ہے۔ آغاز حرکت سے ۴ سیکنڈ بعد رسی ٹوٹ جاتی ہے۔ دریافت کروکہ اس وقت رفتار کیا ہوگی؟ رسی ٹوٹنے کے بعد ق جس مقام پر ساکن ہوگا اسکا

فاصلہ ق کے مقام اول سے دریافت کرو۔

(۳) ۲۰۰ گرام کمیت کا ایک جسم ایک رسی سے باندھ کر ایک کھردری میز پر رکھا گیا ہے اور رسی میز کے کنارے پر سے گذر کر دوسری طرف ۴۰ گرام کمیت کے ایک جسم کو سہارتی ہے جو نیچے لٹکتا ہے۔ میز چکنی ہونے کی صورت میں جتنے وقت میں یہ نظام ایک مفروضہ رفتار حاصل کرے اس سے دوگنے وقت میں میز کھردری ہونیکی صورت میں وہی رفتار حاصل ہوتی ہے۔ قدرِ فرک دریافت کرو۔

(۴) ۱۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک کھردری سطح پر رکھا گیا ہے جس کی قدر فرک $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے اور جس کا میلان افق سے °۳۰ ہے۔ اگر سطح کا طول ۴ فٹ ہو اور ۱۵ پونڈ وزن کی قوت جسم پر سطح کے متوازی عمل کرے تو سطح کی چوٹی تک پہنچنے میں کتنا وقت خرچ ہوگا اور رفتار محصلہ کیا ہوگی؟

(۵) اگر سوال بالا میں جسم سے رسی بندھی ہو جو سطح کی چوٹی پر سے گذر کر دوسری طرف ۱۵ پونڈ کمیت کے جسم کو سہارے تو وقت اور رفتار دریافت کرو۔

(۶) ایک کھردری سطح کا طول ۱۰۰ فٹ ہے اور اس کا میلان افق سے جبا $\frac{3}{5}$ ہے اور قدر فرک $\frac{1}{2}$ ہے۔ ایک جسم حالت سکون سے سطح کی چوٹی پر سے نیچے کی

طرف پھسلتا ہے۔ دریافت کرو کہ سطح کے نچلے سرے پر جسم کی کیا رفتار ہوگی؟

اگر جسم سطح کے اوپر کی طرف پھینکا جائے اور عین چوٹی تک پہنچ جائے تو اس کی ابتدائی رفتار کیا ہوگی؟

(۷) ایک ذرہ ایک کھردری مائل سطح پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔ سطح مائل کا میلان افق سے $\frac{\pi}{۴}$ ہے اور قدر فرک $\frac{۳}{۴}$ ہے۔ تو ثابت کرو کہ اس صورت میں کوئی سا فاصلہ طے کرنے میں جس قدر وقت صرف ہوگا وہ چکنی سطح کی صورت سے دوگنا ہوگا۔

(۸) دو کھردری سطحوں کے میلان افق سے °۳۰ اور °۶۰ ہیں اور ان کے ارتفاع مساوی ہیں۔ ان کو پشت بہ پشت ملاکر رکھا گیا ہے اور ۵ اور ۱۰ پونڈ کمیت کے دو جسم رسی سے وصل کرکے ان پر رکھدئے گئے ہیں۔ رسی انکی مشترکہ چوٹی پر سے گذرتی ہے۔ اگر قدر فرک $\frac{۱}{۲\sqrt{۳}}$ ہو تو اسراع معلوم کرو۔

(۹) سوال بالا میں جسموں کا باہمی تبادلہ کرنے سے کیا اسراع ہوگا؟

(۱۰) ایک ریل گاڑی ایک افقی سڑک پر ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ اگر بھاپ کو اچانک بند کر دیا جائے تو معلوم کرو کہ گاڑی کتنی دور چل کر ساکن ہو جائے گی۔ مزاحمت ۸ پونڈ وزن فی ٹن ہے۔

(۱۱) ۲۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ اگر وہ ۶۰ گز چل کر ساکن ہو جائے تو فرکی مزاحمت کا مقابلہ ایک ٹن کے وزن سے کرو۔

(۱۲) ایک ریل گاڑی ایک افقی سڑک پر ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا رہی ہے۔ فرک وغیرہ کی مزاحمت فی ٹن ۱۰ پونڈ وزن ہے۔ اگر بھاپ کو بند کر دیا جائے تو معلوم کرو کہ گاڑی کتنے وقت میں اور کتنا فاصلہ طے کر کے ساکن ہو گی؟

(۱۳) اگر سوال بالا میں ریل کی سڑک ایک سطح مائل ہو جس کا میلان ۱۱۲ میں ایک ہو تو اس صورت میں وقت اور فاصلہ مطلوبہ کیا ہو گا؟

(۱۴) ۲۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ ریل کی سڑک کا میلان ۱۲۰ میں ایک ہے۔ اگر وہ نصف میل چل کر ساکن ہو جائے تو فرکی مزاحمت کیا ہو گی؟

(۱۵) ایک ریل کی سڑک کا میلان افق سے ۱۰۰ میں ایک ہے۔ ایک ریل گاڑی ایک میل اسی سڑک پر نیچے کی طرف چل کر افقی سڑک پر چلنے لگتی ہے۔ اگر فرکی مزاحمت فی ٹن ۸ پونڈ وزن ہو تو افقی سڑک پر گاڑی کتنی دور جائے گی؟

(۱۶) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ۱۴۰ ٹن ہے ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ چلتے چلتے سڑک میں میلان شروع ہوا جو ۱۲۸ میں ایک ہے۔ میلان شروع ہوتے ہی بھاپ بند کردی گئی۔ اگر مائل سڑک کا طول نصف میل ہو اور فرکی مزاحمت فی ٹن ۱۰ پونڈ وزن ہو تو معلوم کرو کہ میلان ختم ہونے کے بعد افقی سڑک پر کتنا فاصلہ طے کرکے گاڑی ساکن ہوگی؟

(۱۷) سوال بالا میں اگر میلان ختم ہوتے ہی ایک بریک گاڑی وزنی ۱۰ ٹن کے تمام پہیوں کی گردش بند کردی جائے اور پہیوں اور سڑک کے درمیان قدر فرک ء۵ ہو تو گاڑی کا طے کردہ فاصلہ دریافت کرو۔

(۱۸) ۳۰ ٹن کمیت کا ایک انجن ۱۳۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی کو کھینچتا ہے۔ اگر فرک کل گاڑی کے وزن کا $\frac{1}{۵۰}$ ہو اور ایک میل کا فاصلہ طے ہونے کے بعد چال ۴۵ میل فی گھنٹہ ہو تو انجن کی قوت دریافت کرو۔

اگر انجن ریل گاڑی کو حرکت دینے کے عین ناقابل ہو تو سڑک کا میلان کیا ہو گا؟

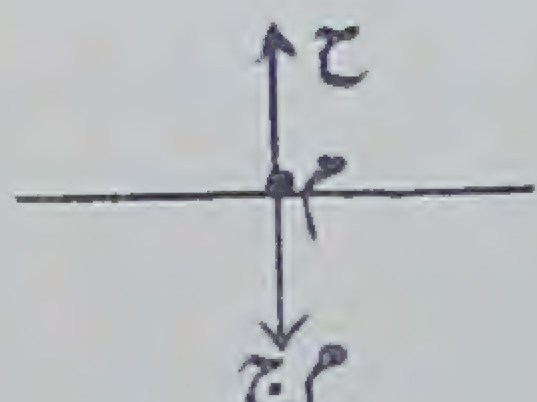
اگر ریل گاڑی مائل سڑک کے نیچے کی طرف یکساں رفتار سے چلے درحالیکہ بھاپ اور بریک عمل نہ کرتے ہوں تو سڑک کا میلان دریافت کرو۔

(۸۰) ۴ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک افقی سطح پر

رکھا گیا ہے جو سمت راس میں اوپر کی طرف اسراع ع سے حرکت کرتی ہے۔ جسم اور سطح کا تعامل دریافت کرو۔

فرض کرو کہ جسم اور سطح کا تعامل ح ہے۔

چونکہ اسراع سمت راس میں اوپر کی طرف ہے اس لئے جسم پر عمل کرنے والی قوتِ مجموعی اوپر کی طرف سمت راس میں ہو گی۔



پس مجموعی قوت (ح - م ج) اوپر کی طرف سمت راس میں ہے اور اس قوت سے اسراع ع پیدا ہوتا ہے۔ پس

ح - م ج = م ع

جس سے ح حاصل ہو گا۔

اگر جسم نیچے کی طرف اسراع ع سے حرکت کرے تو حسب طریق بالا ثابت ہو سکتا ہے کہ تعامل ح ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگا

م ج - ح = م ع

واضح رہے کہ جب جسم اوپر کی طرف حرکت کرتا ہے تو تعامل جسم کے وزن سے زیادہ ہوتا ہے اور جب جسم کی حرکت نیچے کو ہوتی ہے تو تعامل جسم کے

وزن سے کم ہوتا ہے۔

مثال (۱) جسم کی کمیت ۲۰ پونڈ ہے اور اس کی حرکت (۱) ۱۲ فٹ ثانیہ اکائیوں کے اسراع سے اوپر کی طرف ہے (۲) اسی اسراع سے نیچے کی طرف ہے۔ دونو صورتوں میں تعامل دریافت کرو۔

پہلی صورت میں

ح - ۲۰ ج = ۲۰ × ۱۲

∴ ح = ۲۰ (۳۲ + ۱۲) پونڈل = ½ ۲۷ پونڈ کا وزن

دوسری صورت میں

۲۰ ج - ح = ۲۰ × ۱۲

∴ ح = ۲۰ (۳۲ - ۱۲) پونڈل = ½ ۱۲ پونڈ کا وزن

مثال (۲) دو ترازو کے پلڑوں میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے۔ ان کو ایک رسی کے سروں سے باندھکر رسی ایک چرخی پر چڑھا دی گئی ہے اور پلڑوں میں $م_۱$ اور $م_۲$ کمیت کے جسم رکھے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ دوران حرکت میں پلڑوں کے تعامل بالترتیب یہ ہوں گے

$$\frac{۲\, م_۱ (م + م_۲)}{م_۱ + م_۲ + ۲\, م}\, ج \quad \text{اور} \quad \frac{۲\, م_۲ (م + م_۱)}{م_۱ + م_۲ + ۲\, م}\, ج$$

فرض کرو کہ اسراع مشترک ع ہے اور فرض کرو کہ

$$م_۱ > م_۲$$

تب بموجب دفعہ ۴۷

$$\text{ع} = \frac{\text{م}_1 - \text{م}_2}{2\,\text{م} + \text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ج}$$

فرض کرو کہ م۱ اور اس کے پلڑے کے درمیان تعامل ح ہے تو م۱ کی حرکت پر علیٰحدہ غور کرنے سے ظاہر ہے کہ م۱ پر عمل کرنے والی جملہ قوت م۱ ج - ح ہے اور اس کا اسراع ع ہے۔

لہذا $\text{م}_1\,\text{ج} - \text{ح} = \text{م}_1\,\text{ع}$

$$\therefore\ \text{ح} = \text{م}_1\,(\text{ج} - \text{ع})$$

$$= \frac{2\,\text{م}_1\,(\text{م} + \text{م}_2)}{2\,\text{م} + \text{م}_1 + \text{م}_2}\,\text{ج}$$

(۸۱) ایک ضلع میں ۱۲ گھنٹہ میں ۳ انچ بارش ہوئی۔ یہ فرض کرکے کہ بارش کے قطرے نصف میل کی بلندی سے بغیر کسی روک کے گرتے ہیں معلوم کرو کہ بارش کی وجہ سے ضلع کی زمین پر فی مربع میل کسقدر دباؤ پڑا۔ یہ تسلیم کرلیا جائے کہ ایک مکعب فٹ پانی کی کمیت ایک ہزار اونس ہے۔

ایک مربع فٹ پر جو بارش ہوتی ہے اس کا حجم $\frac{1}{4}$ مکعب فٹ ہے اور اس کی کمیت ۲۵۰ اونس ہے۔ اس لئے بارش کی کمیت جو ایک ثانیہ میں زمین پر

پڑتی ہے

$$= \frac{۲۵۰}{۱۶} \times \frac{۱}{۶۰ \times ۶۰ \times ۱۲} = \frac{۵}{۹۶ \times ۱۴۴}$$ پونڈ فی مربع فٹ

بارش کے ہر ایک قطرے کی رفتار زمین پر پڑنے کے وقت

$$= \sqrt{۲ \times \text{ج} \times ۴۴۰ \times ۳} = ۱۶\sqrt{۳۳۰}$$ فٹ فی ثانیہ

لہٰذا معیارِ حرکت جو فی سیکنڈ نابود ہوتا ہے

$$= \frac{۵}{۹۶ \times ۱۴۴} \times ۱۶\sqrt{۳۳۰}$$ یعنی $$\frac{۵\sqrt{۳۳۰}}{۸۶۴}$$ اکائیاں معیارِ حرکت کی

لیکن معیارِ حرکت کی جتنی اکائیاں فی سیکنڈ نابود ہوتی ہیں قوت عاملہ میں اتنے ہی پونڈل ہوتے ہیں۔
لہٰذا زمین پر دباؤ فی مربع فٹ

$$= \frac{۵\sqrt{۳۳۰}}{۸۶۴}$$ پونڈل

پس دباؤ فی مربع میل

$$= ۹ \times ۴۸۴۰ \times ۶۴۰ \times \frac{۵\sqrt{۳۳۰}}{۸۶۴ \times ۳۲}$$ پونڈ کا وزن

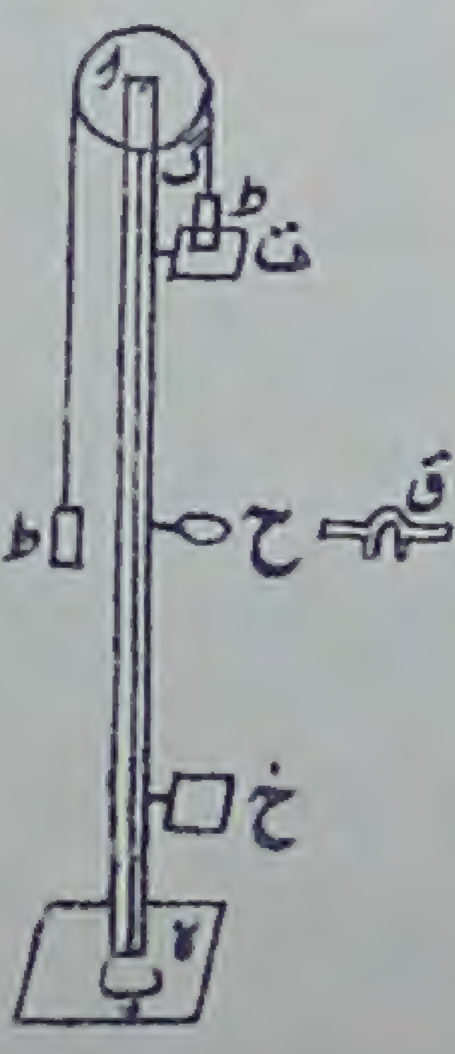
= ۴۱ ٹن کا وزن تقریباً

اسی طرح اگر پانی کی ایک دھار کسی دیوار پر پڑے تو دیوار پر دباؤ فی مربع فٹ $\text{م}\,\text{ر}^{۲}$ ہوگا جہاں م ایک مکعب فٹ پانی کی کمیت پونڈوں میں ہے اور

ر رفتار فی ثانیہ فٹوں میں ہے۔ کیونکہ ایک ثانیہ میں مادہ کی مقدار م ر دیوار پر پڑتی ہے اور پانی کے ہر ذرے کی رفتار ر ہے یعنی جملہ معیار حرکت جو ایک ثانیہ میں نابود ہوتا ہے وہ م ر × ر یعنی م ر^2 ہے۔

(۸۲) آیٹ وُڈ کی مشین - یہ مشین قوانین حرکت کی تصدیق کے لئے استعمال ہوتی ہے اور اسکے ذریعہ ج کی قیمت کا تقریبی اندازہ بھی لگ سکتا ہے۔ اس کی نہایت سادہ شکل یہ ہے۔

ایک سیدھی لکڑی جو درجہ دار ہوتی ہے سمت راس میں زمین میں گاڑی جاتی ہے اور لکڑی کی چوٹی پر ایک ہلکی چرخی ہوتی ہے جو بغیر کسی روک کے گھوم سکتی ہے۔ اس لکڑی پر ایک حلقہ ح اور دو تختیاں ت اور خ ہوتی ہیں جو پیچوں کے ذریعے جہاں چاہیں نصب کی جا سکتی ہیں۔ تختی ت کو جس وقت چاہیں نیچے گرا سکتے ہیں۔ چرخی پر ایک باریک رسی گزرتی ہے جسکے سروں پر دو لمبے پتلے مساوی اوزان ط بندھے ہوتے ہیں



جن میں سے ایک حلقے ح میں سے باآسانی تمام گزر سکتا ہے۔

ایک وزن ق ، ط پر رکھا جاتا ہے
اور تختی ت کو گرا دیا جاتا ہے۔ اس طرح حرکت شروع ہوتی ہے۔ تختی ت کو گرانے سے یہ مطلب ہے کہ وہ اسی مقام پر لکڑی کے متوازی نیچے کی طرف لٹکنے لگتی ہے تاکہ ط اور ق حرکت کرسکیں۔ جب ط اور ق چلتے چلتے حلقہ ح پر پہنچتے ہیں تو ط حلقے میں سے گزر جاتا ہے اور ق حلقے پر رہ جاتا ہے اور وزن ط فاصلہ ح خ یکساں رفتار سے طے کرتا ہے۔ وقت و جو یہ فاصلہ طے ہونے میں لگتا ہے احتیاط سے ناپ لیا جاتا ہے۔

ت سے ح تک گرنے میں اس نظام کا اسراع بموجب دفعہ ۴۷ یہ ہے

$$\frac{(ق + ط) - ط}{(ق + ط) + ط} \, ج \quad \text{یعنی} \quad \frac{ق}{ق + ۲ ط} \, ج$$

فرض کرو کہ یہ اسراع = ع اور فرض کرو کہ فاصلہ ت خ = ف تو ح پر پہنچنے کی رفتار ر ذیل کی مساوات سے حاصل ہوگی

$$ر^۲ = ۲ ع ف$$

ح گذرنے کے بعد فاصلہ ح خ یکساں رفتار ر سے طے ہوتا ہے۔

لہذا اگر ح خ = $ف_۱$ تو

$$و = \frac{ف_۱}{ر} = \frac{ف_۱}{\sqrt{۲ ع ف}}$$

$$\therefore ف_۱^۲ = \frac{ق^۲}{ق + ۲ط} ج ف و^۲$$

چونکہ اس مساوات میں جتنی مقادیر ہیں وہ سب ناپی جا سکتی ہیں اس لئے اس سے ج کی قیمت معلوم ہو سکتی ہے۔

ط، ق، ف اور $ف_۱$ کو مختلف قیمتیں دینے سے تمام بنیادی قوانین حرکت کی تصدیق ہو سکتی ہے۔

ج کی قیمت عملاً اس طریقہ سے زیادہ صحیح طور پر معلوم نہیں ہو سکتی۔ ایٹ وڈ کی مشین کی دلچسپی کا باعث خاص کر اس کی قدامت ہے۔ اور بوجوہ ذیل اس مشین کے ذریعہ سے صحیح نتائج حاصل نہیں ہو سکتے۔ اول چرخی کی کمیت مادہ جو نظر انداز نہیں ہو سکتی۔ دوم چرخی کے محور کی فرک۔ سوم ہوا کی مزاحمت۔ چہارم یہ کہ تجربہ میں وقت کا صحیح طور پر ناپنا بھی مشکل ہے۔

یہ ظاہر ہے کہ گلیلیو کی سطح مائل اور ایٹ وڈ کی مشین دونو کا مقصد قوت جاذبۂ ارض کے اثر کو کم

کرنا ہے تاکہ نتائج ناپے جا سکیں۔ اگر چرخی کا محور ثابت سہاروں پر نہ ہو بلکہ چار چرخیوں کے محیطوں پر ہو جن میں سے دو ایک طرف ہوں اور دو دوسری طرف اور چاروں بغیر کسی روک کے گھوم سکتے ہوں تو محور کی فرک کم ہو سکتی ہے۔

اس تجربہ سے حتی الامکان صحیح نتائج حاصل کرنے کے دیگر وسائل بھی ہیں۔ مثلاً تختی ت کو جب چاہیں فوراً نیچے گرنے کا سامان۔

(۸۳) ایٹ وڈ کی مشین کے ذریعہ ثابت کرو کہ ایک مفروض جسم کا اسراع اس پر عمل کرنے والی قوت کے متناسب ہے۔

پہلے ہم تسلیم کرلیں گے کہ مسئلہ ثبوت طلب درست ہے پھر ہم دیکھیں گے کہ جو نتائج اس سے مستنبط ہوتے ہیں ان کی تصدیق بذریعہ تجربہ ہوتی ہے یا نہیں۔ طریق عمل کی تشریح کیلئے ہم ایک عددی مثال لینگے۔ فرض کرو کہ ط ۴۹½ اونس ہے اور ق ایک اونس یعنی حرکت کرنے والی مقدار مادہ ۱۰۰ اونس ہے اور حرکت دینے والی قوت ایک اونس کا وزن ہے۔

لہذا اس نظام کا اسراع $\frac{1}{100}$ ج ہے (دفعہ ۷۴)

فرض کرو کہ فاصلہ ت ح = ۱ فٹ، اس لئے جب ق حلقے پہ اٹک کر رہ جاتا ہے اسوقت

رفتار $\sqrt{۲ \times \frac{ج}{۱۰۰} \times ۱}$ یعنی $\frac{۸}{۱۰}$ فٹ فی ثانیہ ہو گی

جہاں ج بغرض سہولت ۳۲ کے برابر لیا گیا ہے۔
فرض کرو کہ تختی خ ایسے مقام پر لگائی گئی ہے کہ فاصلہ ح خ طے ہونے میں ۲ سیکنڈ صرف ہوتے ہیں۔

$$\text{تب}\quad ح\,خ = ۲ \times \frac{۸}{۱۰} = \frac{۸}{۵}\ \text{فٹ}$$

اب حالات کو تبدیل کردو۔ ط کو ۴۸ اور ق کو ۴ اونس کردو۔ حرکت کرنے والے مادہ کی مقدار اب بھی ۱۰۰ اونس ہے اور حرکت دینے والی قوت ۴ اونس کے وزن کے برابر ہو گی۔

$$\text{اب اسراع} = \frac{۴\,ج}{۱۰۰}$$

اور ح پر پہنچنے کے وقت رفتار $= \sqrt{۲ \times \frac{۴ج}{۱۰۰} \times ۱} = \frac{۸}{۵}$ فٹ فی ثانیہ ۲ ثانیہ میں اب $\frac{۱۶}{۵}$ فٹ کا فاصلہ طے ہوگا۔ یعنی اگر ہمارا مفروض صحیح ہے تو تختی خ کو پہلے سے دو چند فاصلے پر رکھنا پڑے گا۔

تجربہ سے یہ درست ثابت ہوتا ہے۔

اسی طرح اگر ط $= ۴۵\frac{۱}{۲}$ اونس اور ق $= ۹$ اونس توبھی حرکت کرنے والا مادہ مقدار میں ۱۰۰ اونس ہوگا اور حسابی عمل سے فاصلہ ح خ $\frac{۲۴}{۵}$ فٹ ہو گا۔ تجربہ سے

معلوم ہو گا کہ یہ درست ہے۔

اب تجربہ پھر شروع سے کرو اور مندرجہ بالا قیمتوں سے مختلف قیمتیں ط اور ق کو دو اور ان کی مختلف قیمتوں کو اس طرح تبدیل کرو کہ ۲ ط + ق کی قیمت نہ بدلے۔

اب ہم اسی طریقہ سے ثابت کرینگے کہ جب اسراع غیر متبدل ہو تو قوت اسی طرح بدلتی ہے جس طرح مقدارِ مادہ۔

پہلے کی طرح فرض کرو کہ ط = ½ ۴۹ اونس اور ق = ۱ اونس تو حسب تجربہ بالا ح خ = ⅝ فٹ

پھر ط کو ۹۹ اونس اور ق کو ۲ اونس کرو تاکہ حرکت دینے والی قوت دو چند ہو جائے اور حرکت کرنے والے مادے کی مقدار بھی دو چند ہو جائے۔ پس اگر ہمارا دعوے درست ہے تو اسراع وہی ہو گا جو پہلی صورت میں تھا کیونکہ

$$\frac{\text{حرکت دینے والی قوت بصورت دوم}}{\text{حرکت کرنے والی مقدار مادہ بصورت دوم}} = \frac{\text{حرکت دینے والی قوت بصورت اول}}{\text{حرکت کرنے والی مقدار مادہ بصورت اول}}$$

اس لئے فاصلہ ح خ جو ۲ ثانیہ میں طے ہوتا ہے دونو صورتوں میں ایک ہی ہونا چاہئے۔ تجربہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ فی الواقع ایسا ہی ہے۔

اسی طرح اگر ط کو ۱۴۸ ½ اونس کریں اور ق کو ۳ اونس تو بھی وہی نتیجہ ہو گا۔

تجربہ کی کامیابی کے لئے ضروری ہے کہ چرخی کی فرک کو مغلوب کرنے کی غرض سے ایک فالتو وزن ز بھی ق کے ساتھ رکھا جائے۔

یہ وزن ز وزن ق رکھنے سے پہلے معلوم کرنا چاہئے اور یہ وہ وزن ہوگا جس کے رکھنے سے وزن ط ایکساں رفتار سے آہستہ آہستہ زمین تک پہنچ جائے۔

یہ وزن ز تجربہ کے دوران میں وزن ق کے ساتھ ہی رکھا جائے اور اس کا شمار ق کے وزن میں نہ کیا جائے کیونکہ یہ فالتو وزن ہے اور محض فرک کے اثر کو زائل کرنے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔

امثلہ نمبری (۱۲)

(۱) اگر ایک شخص ۲۰ پونڈ وزن ہاتھ میں لیکر ایک میز پر سے کودے تو ہاتھ پر وزن کا دباؤ کیا ہوگا؟

(۲) ۲۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک افقی سطح پر پڑا ہے۔ سطح اوپر کی طرف حرکت کرتی ہے (۱) ایک فٹ فی ثانیہ کی یکساں رفتار سے (۲) ایک فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ کے یکساں اسراع سے۔ دونو صورتوں میں جسم اور سطح کا تعامل دریافت کرو۔

(۳) ایک شخص جس کی کمیت مادہ ۸ سٹون ہے ایک تختے پر کھڑا ہے۔ اگر تختہ (۱) اوپر کو (۲) نیچے کو حرکت کرے تو تختے کا عمل دریافت کرو۔

(۴) کوئلے کی کان کے گڑھے میں سے ایک بڑے ڈول کے ذریعہ ایک ہنڈرڈ ویٹ کوئلہ نکالا گیا ہے۔ ڈول کی تہ اور کوئلے کے درمیان تعامل ۱۲۶ پونڈ وزن کے برابر ہے۔ڈول کا اسراع دریافت کرو۔

(۵) ایک غبارہ یکساں اسراع سے اوپر کو چڑھتا ہے۔ غبارے کی تہ پر ایک ہنڈرڈ ویٹ کمیت کے جسم کا دباؤ ۱۱۶ پونڈ وزن کے برابر پڑتا ہے۔ دریافت کرو کہ ایک منٹ میں غبارہ کتنی بلندی پر پہنچیگا؟

(۶) ترازو کے دو پلڑے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ۳۰ گرام ہے ایک رسی کے سروں سے باندھکر ایک چرخی پر چڑھا دئے گئے ہیں۔ ایک پلڑے میں ۳۰۰ گرام اور دوسرے میں ۲۴۰ گرام مقادیر مادہ رکھی گئی ہیں۔ رسی کا تناؤ اور پلڑوں کے عمل دریافت کرو۔

(۷) ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذر کر اپنے سروں پر دو پلڑوں کو سہارتی ہے۔ ہر ایک پلڑے کی کمیت ایک اونس ہے۔ اگر ۲ اور ۴ اونس کمیت کے جسم پلڑوں میں رکھے جائیں تو نظام کا اسراع، رسی کا تناؤ اور پلڑوں کے عمل دریافت کرو۔

(۸) ایک روز ۲ گھنٹہ میں نصف انچ بارش ہوئی۔ یہ تسلیم کرکے کہ بارش کے قطرے نہایت چھوٹے ہیں اور زمین پر گرتے وقت ان کی رفتار ۱۰ فٹ فی سیکنڈ ہے زمین پر ان کا دباؤ فی مربع میل دریافت کرو جو انکی حرکت نابود ہونے کے باعث پیدا ہوتا ہے۔ یہ مان لیا جائے کہ ایک مکعب فٹ پانی کی کمیت ۱۰۰۰ اونس ہے اور بارش یکساں اور مسلسل پڑتی ہے۔

(۹) اگر ۲۴ گھنٹہ میں ۲ انچ بارش ہو تو اس کی وجہ سے فی ایکڑ پونڈوں کے وزن میں کس قدر دباؤ پڑیگا۔ بارش کی رفتار زمین پر گرتے وقت اتنی ہی ہے جتنی کہ ایک بغیر روک کے گرنے والے جسم کی رفتار ۴۰۰ فٹ کی بلندی سے گرنے کے بعد ہوتی ہے۔

(۱۰) پانی کی ایک دھار ۸۰ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے دیوار سے اس طرح ٹکراتی ہے کہ ایک ثانیہ میں پانی کی ۳۰۰ گیلن دیوار پر پڑتی ہے۔ یہ تسلیم کرکے کہ ایک گیلن میں $\frac{1}{4}$ ۲۷۷ مکعب انچ ہیں اور ایک مکعب فٹ پانی کی کمیت ۱۰۰۰ اونس ہے دیوار کا عمل پونڈوں کے وزن میں دریافت کرو۔

(۱۱) ایٹ وڈ کی مشین کے دونو وزنوں میں سے ہر ایک کی کمیت ۲۴۰ گرام ہے اور ۱۰ گرام کی کمیت کا ایک وزن ان میں سے ایک پر رکھنے سے وہ ۱۰ ثانیہ

میں ۱۰ میٹر نیچے کی طرف طے کرتا ہے۔ اس سے ثابت کرو کہ ج = ۹۸۰

(۱۲) بتاؤ کہ ایٹ وڈ کی مشین کے استعمال سے کسطرح ثابت کر سکتے ہیں کہ ایک جسم پر یکساں قوت کے عمل کرنے سے یکساں اسراع پیدا ہوگا۔

(۱۳) ایک ہی کمیت کی سولہ گولیاں منکوں کی طرح ایک ڈورے پر چڑھا دی گئی ہیں۔ گولیوں کی لڑی ایک چکنی مائل سطح پر جس کا میلان جب $\frac{1}{۲}$ ہے اس طرح رکھ دی گئی ہے کہ کچھ گولیاں سطح پر ہیں اور کچھ سطح کی چوٹی پر سے نیچے لٹکتی ہیں۔ اگر ابتدا میں اسراع $\frac{ج}{۲}$ ہو تو دریافت کرو کہ کتنی گولیاں نیچے لٹک رہی ہیں؟

(۱۴) ط اور ق کمیت کے دو اجسام ایک رسی کے سروں سے بندھے ہیں۔ ق ایک چکنی مائل سطح پر رکھا ہے جس کا میلان افق سے °۳۰ ہے اور ط چوٹی پر سے نیچے لٹکتا ہے۔ جتنے وقت میں ط حالت سکون سے ایک مفروضہ فاصلہ طے کرتا ہے وہ اسوقت سے چار گنا ہے جو اتنا ہی فاصلہ بغیر روک کے گرنے میں صرف ہوتا ہے۔ ط اور ق کی نسبت معلوم کرو۔

(۱۵) ط کی کمیت ۹ پونڈ ہے اور وہ نیچے لٹکتا ہے۔ ق کی کمیت ۶ پونڈ ہے اور وہ ایک سطح مائل پر

رکھا ہے جس کا میلان افق سے ۳۰° ہے۔ ثابت کرو کہ جتنا وقت اس صورت میں ق کو سطح مائل کا کل طول طے کرنے میں لگتا ہے وہ اس وقت سے نصف ہے جو ط کو کل طول طے کرنے میں لگے اگر ق نیچے لٹکے اور ط سطح پر ہو۔

(۱۶) ایک سطح مائل کا ارتفاع ۱۲ فٹ ہے اور اس کا قاعدہ ۱۶ فٹ ہے۔ ایک ذرہ سطح کی چوٹی پر سے حالت سکون سے شروع ہو کر سطح کا تمام طول طے کر کے ایک افقی سطح پر حرکت کرنے لگتا ہے۔ دریافت کرو کہ سطح افقی پر وہ کس قدر فاصلہ طے کرے گا؟ یہ تسلیم کرلیا جائے کہ سطح مائل سے سطح افقی پر ذرہ بلا نقصان رفتار جاتا ہے اور ہر دو سطوح کی قدر فرک $\frac{1}{3}$ ہے۔

(۱۷) ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی شرح سے چل رہی ہے۔ ثابت کرو کہ بریک لگانے سے تقریباً ۸۴ گز چل کر ٹھیر جائیگی اگر بریکوں کی قوت گاڑی کے وزن کی تین چوتھائی ہو اور قدر فرک ۱۶ء ہو۔

(۱۸) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ۵۰ ٹن ہے ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے حرکت کر رہی تھی۔ جب اس کی بھاپ بند کردی گئی اور بریک کے ڈبے کو بریک لگا دیا گیا تو چوتھائی میل چل کر ریل گاڑی

ساکن ہوگئی - بریک کے ڈبے کی کمیت دریافت کرو - پہیوں اور ریل کی سڑک کے درمیان قدر فرک $\frac{1}{6}$ ہے اور یہ مان لیا جائے کہ غیر مقفل پہئے پھسلنے کے بغیر گردش کرتے ہیں -

(۱۹) ایک رسی کے سروں میں دو جسم بندھے ہیں جن کی کمیت م اور ن ہے - م ایک سطح مائل کے پایہ پر رکھا گیا ہے اور ن چوٹی پر سے نیچے لٹکتا ہے - اگر یہ مقصود ہو کہ م سطح کی عین چوٹی تک پہنچ جائے تو ثابت کرو کہ جب م

فاصلہ $\frac{م+ن}{ن} \times \frac{ف ل}{ف \times ل}$ طے کر چکے تو رسی

کاٹ کر ن کو الگ کر دینا چاہیے -

(۲۰) دو جسم ایک رسی کے سروں سے مربوط ہیں اور وہ رسی ایک چرخی پر چڑھی ہے - اگر اجسام کی کمیتوں کا مجموعہ ایک مقدار مستقل رہے تو ثابت کرو کہ اسراع کے کم ہونے سے رسی کا تناؤ زیادہ ہوگا -

(۲۱) ایک جسم جس کی کمیت $م_۱$ ہے ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے اور $م_۲$ کمیت والا ایک دوسرا جسم رسی کے دوسرے سرے سے بندھا ہے - $م_۲$ ایک میز پر ہے اور میز کے کنارے پر سے

م۱ نیچے لٹک رہا ہے اور م۲ کو کھینچتا ہے۔ اگر میز پر کے جسم کی کمیت دو چند ہو جائے تو رسی کے تناؤ میں اضافہ بقدر نصف ہوتا ہے۔ م۱ اور م۲ کی نسبت معلوم کرو۔

(۲۲) دو جسم جنکی کمیت بالترتیب ۹ پونڈ اور ۱۶ پونڈ ہے ایک چکنی افقی میز پر رکھے ہیں اور انکا درمیانی فاصلہ ۱۰ فٹ ہے۔ اگر ان میں ایک قوت جاذبہ ایسی پیدا ہو جائے کہ وہ ایک دوسرے کو بلا لحاظ فاصلہ ایک پونڈ وزن قوت سے کھینچنا شروع کردیں تو معلوم کروکہ وہ کتنی مدت کے بعد ملیں گے؟

(۲۳) ایک حرکت پذیر چرخی سے وزن و لٹک رہا ہے اور اس چرخی کے گرد گزرنے والی رسی کا کھلا سرا ایک ثابت چرخی پر سے گزر کر ایک وزن ط کو سہارتا ہے۔ ط، ½ و سے بڑا ہے۔ دوران حرکت میں رسی کا تناؤ دریافت کرو۔ واضح رہے کہ رسی کے ہر سہ حصص متوازی ہیں۔

(۲۴) کمیت م کا جسم کمیت ن کے جسم کو چرخیوں کے ایک ایسے نظام میں سہارتا ہے جس میں ہر ایک رسی ن سے بندھی ہے اور تمام رسیاں متوازی ہیں۔ اب کمیت م کا ایک اور جسم ن کے ساتھ لگادیا گیا ہے۔ چرخیوں کا وزن نظر انداز کرکے حرکت معلوم کرو۔

(۲۵) تین حرکت پذیر چرخیوں کا نظام جس میں تمام رسیاں عمودی ہیں اور شہتیر سے بندھی ہیں ایک ہنڈرد ویٹ کمیت کے ایک جسم کو اٹھانے کے لئے استعمال کیا جاتا ہے۔ اٹھانے والی قوت ۱۵ پونڈ کمیت کا وزن ہے جو ایک ثابت چرخی پر سے گذرنے والی رسی سے بندھا ہے۔ ثابت کرو کہ اگر چرخیوں کے وزن کو نظر انداز کیا جائے تو جسم $\frac{ج}{۱۳۴}$ کے اسراع سے اوپر کی طرف حرکت کرے گا۔

(۲۶) دو جسم جن کی کمیت م اور مَ ہے ایک رسی کے سروں سے بندھے ہیں اور رسی تین ثابت اور دو حرکت پذیر چرخیوں پر سے گذرتی ہے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ن ہے اور جو ثابت چرخیوں کے درمیان لٹکتی ہیں۔ رسیوں کے وہ حصے جو چرخیوں کے درمیان ہیں عمودی ہیں۔ وہ شرط دریافت کرو جس کے پورے ہونے سے چرخیاں نہ اوپر چڑھیں اور نہ نیچے گریں اور اس صورت میں م اور مَ کا اسراع معلوم کرو۔

(۲۷) ایک رسی ایک چکنی چرخی پر چڑھی ہے۔ رسی کا جو حصہ ایک طرف لٹک رہا ہے اس کے ذریعہ ایک ۱۲ سٹون کا آدمی اسراع کی ایک اکائی سے نیچے کی طرف حرکت کر رہا ہے اور ایک اور آدمی جو $\frac{۱}{۲}$ ۱۱

سٹون کا ہے دوسری طرف اوپر چڑھ رہا ہے۔ دریافت کرو کہ دوسرے آدمی کا اسراع کیا ہو کہ رسی حرکت نہ کرے؟

(۲۸) ایک ہلکی رسی ایک چکنی چرخی پر چڑھی ہے اسکے ایک طرف ۱۲ سٹون کمیت کا ایک آدمی لٹک رہا ہے اور دوسری طرف ۱۰ سٹون کمیت کا ایک تھیلا۔ اگر آدمی رسی کے ذریعہ اوپر وار ایسا چڑھے کہ اس کا اسراع نصف رہ جائے تو تھیلے کا اسراع اوپر کی طرف معلوم کرو اور ثابت کرو کہ آدمی کا اسراع بلحاظ رسی کے $\frac{ج}{۱۰}$ ہے۔

(۲۹) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ۱۱۲ ٹن ہے ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ ہوا اور فرک وغیرہ کی مزاحمت ۱۶ پونڈ فی ٹن ہے۔ ۱۲ ٹن کمیت کا ایک حصہ گاڑی سے الگ ہو جاتا ہے۔ یہ تسلیم کرکے کہ انجن کی قوت ایک سی رہتی ہے دریافت کرو کہ اس حصے سے ۵۰ ثانیہ میں گاڑی کس قدر آگے بڑھ جائیگی اور جس وقت وہ حصہ ساکن ہوگا اس وقت گاڑی کی رفتار کیا ہوگی؟

(۳۰) دو ذرے جن کی کمیت م اور ۲ م ہے ایک چکنی میز پر اکٹھے پڑے ہیں اور ایک رسی کے سروں سے بندھے ہیں۔ رسی میز کے کنارے پر سے لٹک کر ایک چرخی کو سہارتی ہے اور چرخی سے ۲ م کمیت کا

ایک جسم لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کا اسراع $\frac{۹ ج}{۱۷}$ ہے۔

(۳۱) ایک چکنا فانہ جس کی کمیت م ہے ایک افقی سطح پر پڑا ہے اور ایک ذرہ جس کی کمیت ن ہے اس کے مائل پہلو پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے جس کا میلان افق سے عہ ہے۔ ثابت کرو کہ فانہ کا اسراع

$$\frac{ن\ ج\ جب\ عہ\ جم\ عہ}{م + ن\ جب\ عہ}$$ ہے۔

فرض کرو کہ ع ذرہ کا اسراع مائل پہلو کی عمودی سمت میں فانہ کی طرف ہے اور ع۲ فانہ کا افقی اسراع ہے اور فرض کرو کہ فانہ اور ذرہ کے درمیان تعامل ح ہے تو ح ایک طرف ذرہ پر عمل کرتا ہے اور دوسری طرف فانہ پر۔

تب ن ع = ن ج جم عہ − ح ......(۱)

اور م ع۲ = ح جب عہ ......(۲)

نیز چونکہ ذرہ مائل پہلو پر حرکت کرتا ہے اور دوران حرکت میں اس سے جدا نہیں ہوتا اس لئے فانے کے اسراع کا جزء تحلیلی مائل پہلو کی عمودی سمت میں وہی ہوگا جو ذرے کے اسراع کا جزء تحلیلی اسی سمت میں ہے اور یہ جزء ع ہے

∴ ع = ع۲ جب عہ ......(۳)

(۱)، (۲)، (۳) کو حل کرنے سے ع۲ حاصل ہوگا۔

باب ششم

صدمہ۔ کام اور توانائی

(۸۴) صدمہ۔ **تعریف**۔ وقت کی ایک مدت مفروضہ میں ایک قوت کا صدمہ، قوت اور وقت کے حاصل ضرب کے مساوی ہوا کرتا ہے۔ قوت کے متبدل ہونے کی صورت میں قوت کی قیمتِ اوسط لی جائے۔

اگر ایک قوت ق کے عمل کرنے کی مدت و ہو تو

صدمہ = ق × و

مدت مفروضہ میں قوت کا صدمہ قوت کے معیار حرکت کے برابر ہوا کرتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ابتدا میں رفتار ب سے حرکت کرتا ہے۔ اگر اس پر ایک مستقل قوت ق مدت و تک عمل کرے اور قوت کے عمل سے اسراع ع پیدا ہو تو ق = م ع

لیکن اگر مدت و کے اختتام پر رفتار ر ہو تو

ر = ب + ع و

پس صدمہ = ق و = م ع و = م (ر - ب) = م ر - م ب

= اس معیارِ حرکت کے جو مدت و میں پیدا ہوا

اگر قوت متبدل ہو تو بھی یہ نتیجہ درست ہے۔

لہذا اس سے ظاہر ہے کہ حرکت کا قانون دوم صورت ذیل میں بھی بیان ہو سکتا ہے۔

ایک مدت مفروضہ میں ایک ذرے کے معیارِ حرکت کی تبدیلی قوت عاملہ کے صدمے کے برابر ہے اور اور دونو کی سمت ایک ہے۔

(۸۵) صدمے والی قوتیں ۔ فرض کرو کہ ایک قوت ق ایک جسم پر جس کی کمیت م ہے مدت و تک عمل کرتی ہے اور فرض کرو کہ اس مدت کی ابتدا اور اختتام پر جسم کی رفتاریں بالترتیب ب اور ر ہیں تو بموجب دفعہ سابقہ

ق و = م (ر - ب)

اب قوت کو بڑھتا ہوا فرض کرو اور مدت و کو گھٹتا ہوا فرض کرو۔ اس طرح آخر کار قوت کی مقدار بےحد بڑھ جائے گی اور مدت و بے حد کم ہو جائے گی۔ لیکن یہ ممکن ہے کہ ق اور و کا حاصل ضرب ایک مقدار محدود ہو

مثلاً فرض کرو کہ ق = $۱۰^{۷}$ پونڈل اور و = $\frac{۱}{۱۰^{۷}}$ سیکنڈ اور م = ۱ پونڈ تو اس صورت میں تبدلِ رفتار = رفتار کی ایک اکائی

اگر ایک قوتِ محدودہ کے عمل کا پورا اثر معلوم کرنا مقصود ہو جب قوت کے عمل کی مدت محدود اور مقرر ہو تو ہمیں دو باتیں معلوم کرنی چاہئیں (۱) ذرے کی رفتار کی تبدیلی جو قوت کے عمل سے اس مدت میں ظہور پذیر ہو (۲) اس مدت میں ذرے کی نقل مکان -

اب اگر قوت کی مقدار بے حد زیادہ ہو اور قوت کے عمل کی مدت بے حد کم ہو تو قوت کے دوران عمل میں ذرہ بہت تھوڑا فاصلہ طے کریگا - یعنی ذرے کی نقل مکان نظر انداز ہو سکتی ہے -

پس ایسی قوت کی صورت میں قوت کے عمل کا پورا اثر معلوم ہو جاتا ہے جب معیار حرکت کی تبدیلی جو قوت سے پیدا ہوئی ہے معلوم ہو جائے -

ایسی قوت کو صدمے والی قوت کہتے ہیں اس وجہ سے اس کی تعریف یہ ہے - صدمے والی قوت ایک بہت بڑی قوت ہے جس کی مدت عمل بہت کم ہو ایسی کہ اس کے عمل سے اس مدت میں ذرے کی نقل مکان نظر اندازی کے قابل ہو - اس کے پورے اثر کا اندازہ صدمے یعنی معیار حرکت کی تبدیلی سے ہوتا ہے -

ایسی کوئی عملی مثال دیکھنے میں نہیں آتی جس میں ایک بے حد بڑی قوت بے حد تھوڑی مدت میں عمل کرے۔ ہتھوڑے کی چوٹ اور بلیرڈ کے گولوں کی ٹکر تقریبی مثالیں ہیں۔

اگر قوت یکساں نہ ہو تو بھی بیان بالا درست ہے۔ بلیرڈ کے گولوں کی ٹکر میں عام طور پر قوت میں بہت تبدیلی واقع ہوتی ہے۔

مثال (۱) ایک قوت ۹ پونڈ کمیت کے ایک جسم پر عمل کرکے اس کی رفتار کو ۲۰ میل فی گھنٹہ سے بدلکر ۱۲ میل فی گھنٹہ کردیتی ہے۔ قوت کا صدمہ معلوم کرو۔

جواب۔ صدمے کی ۱۳۲ اکائیاں۔

مثال (۲) ۲ پونڈ کمیت کے ایک ساکن جسم کو چوٹ لگائی جاتی ہے اور اس چوٹ سے وہ ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت شروع کرتا ہے۔ اگر چوٹ کے عمل کی مدت $\frac{1}{100}$ ثانیہ ہو تو قوت عاملہ کی اوسط قیمت دریافت کرو۔

جواب۔ دو ہزار پونڈل۔

مثال (۳) شیشے کی ایک گولی جس کی کمیت ایک اونس ہے ۲۵ فٹ کی بلندی سے گرکر پھر ۱۶ فٹ کی بلندی تک اچکتی ہے۔ تو صدمے کی قیمت دریافت کرو اور اگر گولی اور فرش کی ٹکر کی مدت $\frac{1}{10}$ ثانیہ ہو تو گولی اور فرش کے

درمیان اوسط قوت معلوم کرو۔
جواب ۔ صدمے کی $\frac{1}{4}$ ۴ اکائیاں ۔ ۴۷ پونڈل

(۸۶) **دو جسموں کا تصادم** ۔ جب دو جسم ا اور ب ٹکراتے ہیں تو جتنا وقت کہ وہ آپس میں مس کرتے ہیں اس وقت کی ہر آن میں ا کا عمل ب پر متساوی اور متقابل ہے ب کے عمل کے جو ا پر ہوتا ہے۔ یہ حرکت کے تیسرے قانون کے بموجب ہے۔

اس لئے ب پر ا کے عمل کا صدمہ متساوی اور متقابل ہے اس صدمے کے جو ا پر ب کے عمل سے ظہور پذیر ہوتا ہے۔

اس سے ظاہر ہے کہ ب کے معیارِ حرکت میں جو تبدیلی واقع ہوتی ہے وہ ا کے معیارِ حرکت کی تبدیلی کے متساوی اور متقابل ہے۔ اس لئے ان تبدیلیوں کا مجموعہ ایک ہی سمت میں صفر ہو گا۔ پس تصادم سے دونو جسموں کی حرکت کے معیاروں کا مجموعہ ایک ہی سمت میں ایک مقدار مستقل رہتا ہے۔

مثال (۱) ۳ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۱۳ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ایک دوسرے جسم سے جاکر مل جاتا ہے جس کی کمیت ۲ پونڈ ہے اور جو ۳ فٹ

فی ثانیہ کی رفتار سے اسی سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ دونو جسم مل کر ایک ہو جاتے ہیں۔ اس مجموعی جسم کی رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ رفتار مطلوبہ ر ہے تو چونکہ تصادم سے دونو جسموں کی حرکت کے معیاروں کا مجموعہ نہیں بدلتا لہذا

(۳+۲) ر = ۳ × ۱۳ + ۲ × ۳ = ۴۵ اکائیاں (معیار حرکت کی)

∴ ر = ۹ فٹ فی ثانیہ

مثال (۲) اگر مثال بالا میں دوسرا جسم پہلے جسم کی حرکت کے متقابل حرکت کر رہا ہو تو رفتار کیا ہو گی؟

اس صورت میں چونکہ حرکت کے معیار متقابل سمتوں میں ہیں اس لئے پہلے جسم کے معیار حرکت کو ۳×۱۳ کہیں تو دوسرے جسم کا معیار حرکت (−۲ × ۳) ہو گا۔ پس اگر رفتار مطلوبہ ر۱ ہو تو

(۳+۲) ر۱ = ۳ × ۱۳ − ۲ × ۳ = ۳۳ اکائیاں (معیار حرکت کی)

∴ ر۱ = $\frac{۳۳}{۵}$ = ۶ $\frac{۳}{۵}$ فٹ فی ثانیہ

(۸۷) بندوق اور اس کی گولی کی حرکت۔

جب بندوق چلائی جاتی ہے تو بارود کو آگ لگ جاتی ہے اور وہ فوراً ایسی گیس بن جاتی ہے جس کا دباؤ بہت زیادہ ہوتا ہے اور اس دباؤ کے زور سے

گولی بندوق سے نکلتی ہے۔ گیس کا عمل بعینہ ایسا ہے جیسا کہ ایک دبی ہوئی کمانی کا ہوتا ہے جو اپنی اصلی وضع پر آنے کی کوشش کرتی ہے۔ گولی نکلنے سے قبل کسی آن میں جتنا زور گولی پر آگے کی طرف پڑتا ہے اتنا ہی زور بندوق پر پیچھے کی طرف پڑتا ہے۔ اس لئے گولی کا معیارِ حرکت جو اس طرح زور پڑنے سے پیدا ہوتا ہے بندوق کے معیارِ حرکت کے متساوی اور متقابل ہوگا درانحالیکہ بندوق بلا مزاحمت حرکت کرسکے۔ اور بندوق چلانے والے کو بندوق کا جو دھکا محسوس ہوتا ہے۔ اس کی یہی وجہ ہوتی ہے۔

مثال۔ ایک گولہ جس کی کمیت ۴۰۰ پونڈ ہے ایک توپ کے ذریعہ چلایا جاتا ہے۔ توپ کی کمیت ۵۰ ٹن ہے اور گولے کی رفتار توپ کے منہہ سے نکلتے وقت ۹۰۰ فٹ فی سیکنڈ ہے۔ گولہ چلنے کے سبب توپ کی رفتار کیا ہوگی؟

چونکہ توپ کا معیار حرکت گولے کے معیار حرکت کے متساوی اور متقابل ہے اس لئے اگر توپ کی رفتار ر ہو تو

$$۵۰ \times ۲۲۴۰ \times ر = ۴۰۰ \times ۹۰۰$$

$$\therefore ر = ۳ \frac{۳}{۱۴} \text{ فٹ فی ثانیہ}$$

امثلہ نمبری (۱۳)

(۱) ۲۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ ایک دوسرا جسم جس کی کمیت ۷ پونڈ ہے ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اسی سمت میں چلتا ہوا پیچھے سے آکر پہلے جسم کے ساتھ مل جاتا ہے اور پھر دونو اکٹھے ایک رفتار سے حرکت کرتے ہیں۔ مشترکہ رفتار دریافت کرو۔

(۲) ۸ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک سمت میں حرکت کرتا ہوا ایک دوسرے جسم سے جا ملتا ہے جس کی کمیت ۲۴ پونڈ ہے اور جس کی رفتار ۲ فٹ فی ثانیہ اسی سمت میں ہے۔ دونو جسم ٹکرا کر ایک ہو جاتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اس مجموعی جسم کی رفتار ۳ فٹ فی ثانیہ ہے۔

اگر ان کی حرکت متقابل سمتوں میں ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد مجموعی جسم ساکن ہوگا۔

(۳) ۱۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ۱۲ پونڈ کمیت کے ایک دوسرے جسم سے ٹکراتا ہے جو ۷ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے متقابل سمت میں حرکت کر رہا ہے۔ اگر ٹکرانے کے بعد دونو جسم ایک ہو جائیں تو ثابت

کرو کہ مجموعی جسم کی رفتار ۲ فٹ فی ثانیہ اس سمت میں ہوگی جس سمت میں بڑا جسم حرکت کر رہا تھا۔

(۴) ایک اونس کمیت کی گولی ۱۰ پونڈ کمیت کی بندوق سے ۱۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلتی ہے۔ بندوق کی رفتار پیچھے کی طرف معلوم کرو۔

(۵) ۴۰ ٹن کمیت کی ایک توپ سے ۸۰۰ پونڈ کمیت کا ایک گولہ ۲۰۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا جاتا ہے۔ اگر توپ پیچھے کی طرف حرکت کرنے کیلئے آزاد ہو تو اس کی رفتار دریافت کرو۔

(۶) ۳۸ ٹن کمیت کی توپ سے ۷۰۰ پونڈ کمیت کا گولہ ۱۷۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا جاتا ہے۔ اگر توپ کی حرکت کو روکنے کے لئے ۱۷ ٹن وزن کی مستقل قوت استعمال کی جائے تو معلوم کرو کہ توپ کتنے فٹ پیچھے کی طرف حرکت کرے گی؟

(۷) ۸۱ ٹن کمیت کی توپ سے ۸۰۰ پونڈ کمیت کا گولہ ۱۴۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا جاتا ہے۔ تو دریافت کرو کہ توپ کی حرکت کو روکنے کے لئے کتنی مستقل قوت استعمال کی جائے کہ توپ ۵ فٹ میں ساکن ہو جائے؟

(۸) ایک ٹن کمیت کی توپ سے ۸۰ پونڈ کمیت کا گولہ چلایا جاتا ہے اور توپ پیچھے کی طرف زور کرکے

ایک سطح مائل پر ۵ فٹ چڑھ جاتی ہے۔ گولے کی ابتدائی رفتار دریافت کرو۔

(۸۸) سکونیات کے باب یازدہم میں طالب علم کو معلوم ہو چکا ہے کہ جب کسی قوت کا نقطۂ عمل قوت کی سمت میں حرکت کرتا ہے تو یہ کہا جاتا ہے کہ قوت نے کام کیا۔ اور اس کام کی مقدار کا اندازہ دو مقداروں کے حاصل ضرب سے کیا جاتا ہے۔ ایک ان میں سے قوت ہے اور دوسری وہ فاصلہ جو قوت کے نقطۂ عمل نے قوت کی سمت میں طے کیا۔ کام کی اکائی جو انجنیر استعمال کرتے ہیں فٹ پونڈ کہلاتی ہے۔ اور یہ وہ کام ہے جو ایک پونڈ وزن کو ایک فٹ اوپر وار اٹھانے میں کیا جاتا ہے۔

برطانیہ میں کام کی مطلق اکائی وہ کام ہے جو ایک پونڈل کی قوت اپنے نقطۂ عمل کو ایک فٹ حرکت دینے میں کرتی ہے۔ کام کی اس اکائی کو فٹ پونڈل کہتے ہیں۔ اگر کام کی اکائی فٹ پونڈل ہو تو جب ط پونڈل کی قوت کا نقطۂ عمل ف فٹ حرکت کرے گا تو کل کام ط × ف فٹ پونڈل ہوگا۔

چونکہ ایک پونڈ کا وزن ج پونڈل کے مساوی ہے اس لئے ایک فٹ پونڈ ج فٹ پونڈل کے برابر ہے۔ کام کی س گ ث اکائی وہ کام ہے جو ایک

ڈائین کی قوت اپنے نقطۂ عمل کو ایک سینٹی میٹر حرکت دینے میں کرے۔
کام کی اس اکائی کو ارگ کہتے ہیں۔

$$\frac{\text{ایک فٹ پونڈل}}{\text{ایک ارگ}} = \frac{\text{پونڈل} \times \text{فٹ}}{\text{ڈائین} \times \text{سینٹی میٹر}}$$

$$= ۱۳۸۰۰ \times \frac{۱۲}{۰٫۳۹۳۷}$$ تقریباً (دفعات ۶۶ و ۳)

$$= ۴۲۱۳۹۰$$ تقریباً

جب کوئی عامل ایک ثانیہ میں ایک جول یعنی $۱۰^۷$ ارگ کام کر رہا ہو تو یہ کہا جاتا ہے کہ ایک واٹ کی طاقت سے کام کر رہا ہے۔ ایک اسپی طاقت ۷۴۶ واٹوں کے برابر ہے۔

(۸۹) مثال (۱) ۱۵۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی کو ایک انجن ۶۰ میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے چلا رہا ہے۔ رگڑ اور ہوا وغیرہ کی مزاحمتوں کا مجموعی اثر ۱۰ پونڈ وزن فی ٹن کے مساوی ہے۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

ریل گاڑی کی حرکت کو روکنے والی قوت ۱۵۰ × ۱۰ یعنی ۱۵۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔
۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار ۸۸ فٹ فی ثانیہ کے مساوی ہے، پس ۱۵۰۰ پونڈ وزن کی قوت کا نقطۂ عمل ایک سیکنڈ میں

۸۸ فٹ حرکت دیا جاتا ہے اس لئے کام کی مقدار ۱۵۰۰ × ۸۸ فٹ پونڈ فی ثانیہ ہے۔

اگر انجن کی اسپی طاقت لا ہو تو ایک منٹ میں وہ لا × ۳۳۰۰۰ فٹ پونڈ کام کرے گا۔ اس لئے فی ثانیہ کام لا × ۵۵۰ فٹ پونڈ ہوگا۔

$$\therefore \text{لا} \times ۵۵۰ = ۸۸ \times ۱۵۰۰$$

$$\therefore \text{لا} = ۲۴۰$$

مثال (۲) ۱۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی کو ایک انجن ۴ منٹ کھینچ کر ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار دیدیتا ہے۔ رگڑ وغیرہ کی مزاحمت ۸ پونڈ وزن فی ٹن ہے۔ انجن کی قوت یکساں ہے۔ دریافت کرو کہ انجن کی اسپی طاقت کم از کم کیا ہے؟

چونکہ ۲۴۰ سیکنڈ میں ۴۴ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار پیدا ہوتی ہے اس لئے ریل گاڑی کا اسراع $\frac{۴۴}{۲۴۰}$ یعنی $\frac{۱۱}{۶۰}$ فٹ سیکنڈ اکائیاں ہوگا۔

فرض کرو کہ انجن کی قوت ط پونڈل ہے

رگڑ وغیرہ کی کل مزاحمت ۸۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے اس لئے ریل گاڑی پر کل قوت (ط − ۸۰۰ ج) پونڈل ہے۔

$$\text{اس لئے}\quad \text{ط} - ۸۰۰\,\text{ج} = ۱۰۰ \times ۲۲۴۰ \times \frac{۱۱}{۶۰}$$

$$\therefore \text{ط} = ۸۰۰\left(\text{ج} + \frac{۱۵۴}{۳}\right)\text{پونڈل} = ۸۰۰\left(۱ + \frac{۱۵۴}{۳ \times ۳۲}\right)\text{پونڈ وزن}$$

$$= 800 \times \frac{125}{48}$$ پونڈ وزن

جب ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ چل رہی ہے تو کام جو فی ثانیہ کیا جا رہا ہے وہ $800 \times \frac{125}{48} \times 44$ فٹ پونڈ ہے۔
پس اگر انجن کی اسپی طاقت ط ہو تو

$$ط \times 550 = 800 \times \frac{125}{48} \times 44$$

$$\therefore ط = 166\frac{2}{3}$$

مثال (۳) ۱۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ایک سطح مائل پر چڑھ رہی ہے جس کا میلان ۲۸۰ میں ایک ہے۔ رگڑ وغیرہ کی مزاحمت ۱۶ پونڈ وزن فی ٹن ہے۔ اگر انجن کی اسپی طاقت ۲۰۰ ہو اور وہ اپنی پوری طاقت سے کام کر رہا ہو تو ریل گاڑی کی رفتار معلوم کرو۔
رگڑ وغیرہ کی مزاحمت ۱۶۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے اور ریل گاڑی کے وزن کا جزء تحلیلی سطح مائل پر نیچے کی طرف ۱۰۰ ٹن کے $\frac{1}{280}$ کے وزن کے برابر ہے یعنی ۸۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔ لہذا حرکت کو روکنے والی کل قوت ۲۴۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے

فرض کرو کہ ریل گاڑی کی رفتار فی ثانیہ فٹوں میں ر ہے تو انجن کا کام وہ ہے جو ۲۴۰۰ پونڈ وزن کی قوت کے نقطۂ عمل کو فی ثانیہ ر فٹ کھینچنے میں

کیا جاتا ہے۔ یعنی ۲۴۰۰ ر فٹ پونڈ فی ثانیہ ہے لیکن

کل کام جو انجن کر سکتا ہے وہ $\frac{۳۳۰۰۰ \times ۲۰۰}{۶۰}$ یعنی

۱۱۰۰۰۰ فٹ پونڈ فی ثانیہ ہے

پس ۲۴۰۰ ر = ۱۱۰۰۰۰

یعنی ر = $\frac{۱۱۰۰}{۲۴}$

اس لئے ریل گاڑی کی رفتار $\frac{۱}{۴}$ ۳۱ میل فی گھنٹہ ہے

امثلہ نمبری (۱۴)

(۱) ۵۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی یکساں رفتار سے چل رہی ہے ۔ ہوا اور رگڑ وغیرہ کی مزاحمت ۴۰ پونڈ وزن فی ٹن ہے۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

(۲) اس انجن کی اسپی طاقت کیا ہے جو ایک ریل گاڑی کو ۲۰۰۰ پونڈ وزن کی مزاحمت کے متقابل ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلا رہا ہے ؟

(۳) ۱۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ایک سطح مائل پر ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھ رہی ہے ۔ سطح کا میلان ۲۰۰ میں ایک ہے۔ جاذبہ ارض کے سوا تمام مزاحمتوں کو نظر انداز کر کے انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

(۴) ۲۰۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی ایک سطح مائل پر ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھ رہی ہے۔ سطح کا میلان ۵۰۰ میں ۳ ہے اور انجن کی اسپی طاقت ۶۰۰ ہے۔ رگڑ وغیرہ کی مزاحمت فی ٹن معلوم کرو۔ ۲۰۰ ٹن میں انجن کی کمیت بھی شامل ہے۔

(۵) ایک انجن ایک سطح مائل پر ۲۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چڑھ رہا ہے۔ سطح کا میلان ۱۰۰ میں ایک ہے۔ انجن اور اس پر کے بوجھ کی کمیت ۱۰ ٹن ہے۔ اور رگڑ وغیرہ کی مزاحمت ۱۰ پونڈ وزن فی ٹن ہے۔ انجن کی اسپی طاقت دریافت کرو۔

(۶) ۶۰ ٹن کمیت کی ایک ریل گاڑی کو ایک انجن کھینچنا شروع کرتا ہے ۳ منٹ کے بعد ریل گاڑی کی رفتار ۲۰ میل فی گھنٹہ ہو جاتی ہے۔ حرکت متقابل مزاحمت ۱۰ پونڈ وزن فی ٹن ہے اور اسراع یکساں ہے۔ انجن کی اسپی طاقت معلوم کرو۔

(۷) ۱۰ ٹن کے ایک وزن کو ایک کھردری مائل سطح پر اوپر کی جانب آدھ گھنٹہ میں ۳۳۰ فٹ کھینچا گیا ہے۔ سطح کا میلان افق سے 30° ہے اور قدر فرک $\frac{1}{\sqrt{3}}$ ہے۔ جس انجن نے یہ کام کیا اس کی اسپی طاقت دریافت کرو اور کام کی مقدار بھی معلوم کرو۔

(۸) نصف پونڈ کمیت کا ایک پتھر حالت سکون سے

گرنا شروع کرتا ہے۔ دریافت کرو کہ دسویں ثانیہ میں قوت جاذبۂ ارض اس پر کتنا کام کرتی ہے۔

(۹) ایک جہاز کے انجن کی اسپی طاقت ۲۵۰۰۰ ہے اور انجن جہاز کو ۲۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلا سکتا ہے۔ حرکت کے متقابل پانی کی مزاحمت دریافت کرو۔

(۹۰) **توانائی۔ تعریف**۔ ایک جسم کی کام کرنیکی قابلیت کو توانائی کہتے ہیں اور اس کی دو قسمیں ہیں۔ توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ۔ جو توانائی کسی جسم میں حرکت کی وجہ سے ہو وہ اس کی **توانائی بالفعل** کہلاتی ہے۔ اور اگر اس جسم کو ساکن کرنے کے لئے قوتیں لگائی جائیں تو اس کے ساکن ہوئے تک جس قدر کام ان قوتوں کے متقابل وہ جسم کرے گا وہ اسکی توانائی بالفعل کا اندازہ ہوگا۔

گرنے والا جسم، جھولنے والا رقاص، گھومنے والا پہیہ اور توپ کا متحرک گولا سب توانائی بالفعل رکھتے ہیں۔ فرض کرو کہ کمیت م کا ایک ذرہ رفتار ر سے حرکت کر رہا ہے تو اس کام کی مقدار دریافت کرو جو ساکن ہوئے تک وہ ذرہ اپنی حرکت کے زور سے کر سکتا ہے۔ فرض کرو کہ ایک قوت ق اس کی حرکت کے متقابل عمل کرتی ہے اور اس کو ساکن کر دیتی ہے۔ فرض کرو کہ یہ قوت ایسی ہے جس سے ذرے میں اسراع

($-\text{ع}$) پیدا ہوتا ہے تو $\text{ق} = \text{م}\,\text{ع}$

فرض کرو کہ ساکن ہونے تک ذرہ فاصلہ لا طے کرتا ہے تو

$$0 = \text{ر}^2 + 2\,(-\text{ع})\,\text{لا}$$

$$\therefore \text{ع}\,\text{لا} = \tfrac{1}{2}\,\text{ر}^2$$

پس ذرے کی توانائی بالفعل

= اس کام کی مقدار جو ساکن ہونے تک اس نے کیا

$$= \text{ق}\,\text{لا} = \text{م}\,\text{ع}\,\text{لا} = \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ر}^2$$

پس ایک متحرک ذرے کی توانائی بالفعل دو مقداروں کا حاصل ضرب ہے ایک ذرے کی کمیت دوسرے اسکی رفتار کے مربع کا نصف۔

(۹۱) **مسئلہ**۔ ثابت کرو کہ فاصلے کی اکائی میں توانائی بالفعل کی تبدیلی قوت عاملہ کے مساوی ہے۔

فرض کرو کہ ایک قوت ق کمیت م کے ایک ذرے پر وقت و میں عمل کرکے اس کی رفتار کو ب سے بدل کر ر بنا دیتی ہے۔ اور اس مدت میں ذرہ فاصلہ ف طے کرتا ہے تو

$\text{ر}^2 - \text{ب}^2 = 2\,\text{ع}\,\text{ف}$ جہاں ع اسراع ہے جو ذرے میں پیدا ہوا

$$\therefore \frac{\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ر}^2 - \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ب}^2}{\text{ف}} = \text{م}\,\text{ع} = \text{ق} \quad \ldots\ldots (1)$$

یہ مساوات مسئلہ کی اس صورت کو ثابت کرتا ہے جب قوت یکساں ہو۔

اگر قوت متبدل ہو تو بھی ثبوت یہی ہے صرف وقت کی مدت و اس قدر قلیل فرض کرو کہ اس مدت میں قوت میں چنداں تبدیلی نہ واقع ہو۔

نتیجہ صریح۔ مساوات (۱) سے ظاہر ہے کہ ایک ذرے کی توانائی بالفعل کی تبدیلی اس کام کے برابر ہے جو ذرے پر کیا گیا۔ اگر دفعہ (۳۲) کی پہلی اور تیسری مساواتوں کو م سے ضرب دیں

تو م (ر − ب) = م ع و = ق و

اور ½ م (ر² − ب²) = م ع ف = ق ف

یہ معیار حرکت اور توانائی کی مساواتیں کہلاتی ہیں الفاظ میں ان مساواتوں کو اس طرح بیان کیا جاتا ہے

معیار حرکت کی تبدیلی = قوت × وقت

توانائی بالفعل کی تبدیلی = قوت × فاصلہ

(۹۲) اگر ایک جسم اپنی موجودہ وضع سے نقلِ مکان کرے تو اس کی بہت سی وضعیں ہو سکتی ہیں۔ ان وضعوں میں سے ایک خاص وضع کو معیاری وضع یا صفری وضع کہتے ہیں۔ یہ وضع حالات پر منحصر ہے

ایک جسم اپنی موجودہ وضع سے نقل مکان کرکے اپنی معیاری وضع تک پہنچنے میں جس قدر کام کرسکتا ہے وہ اس کی **توانائی بالقوہ** کہلاتی ہے۔

توانائی بالقوہ کی مثالیں۔ ایک دبی ہوئی کمانی میں

توانائی بالقوہ ہوتی ہے۔ یعنی اپنی اصلی شکل پر آنے میں یہ، کام کرسکتی ہے اور اس کام کی مقدار کمانی کی توانائی بالقوہ ہے۔

اگر کوئی جسم زمین سے بلند واقع ہو تو بھی اس میں توانائی بالقوہ ہوتی ہے۔

مثلاً کلاک کو حرکت دینے والا وزن جب کہ کلاک کو کنجی دی جائے۔ اور پتھر جو بلندی پر واقع ہو اور پانی جو ایک بلند حوض میں بھرا ہوا ہو۔ ان جسموں کی توانائی بالقوہ وہ کام ہے جو زمین تک پہنچنے میں یہ جسم کر سکتے ہیں ایسے جسموں کے لئے زمین کی سطح معیاری وضع یا صفری وضع فرض کی جاتی ہے۔ دبی ہوئی ہوا میں بھی توانائی بالقوہ ہے یعنی پھیل کر جب یہ اپنا اصلی حجم اختیار کرتی ہے اور ایسا کرنے میں جس قدر کام کرتی ہے وہ اس کی توانائی بالقوہ ہے۔ دبی ہوئی ہوا کا اصلی حجم وہ ہے جو کرہ ہوا میں مل کر اس کا حجم ہو۔

(۹۳) کمیت م کا ایک ذرہ بلندی ی پر ساکن ہے۔ اگر وہ اس بلندی سے گرے تو ثابت کرو کہ دوران حرکت میں اس کی توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ ایک مقدار مستقل ہے۔

فرض کرو کہ ذرہ نقطہ ک سے گر کر نقطہ ل پر زمین پر پہنچتا ہے۔

فرض کرو کہ ک ل میں ایک نقطہ ط ہے جہاں ک ط = لا
اور فرض کرو کہ نقطہ ط پر ذرے کی رفتار ر ہے۔

تو ر^{۲} = ۲ ج لا

ط پر ذرے کی توانائی بالفعل = $\frac{۱}{۲}$ م ر^{۲} = م ج لا

اور ط پر ذرے کی توانائی بالقوہ

= اس کام کے جو ذرے کا وزن ط سے ل تک گرنے میں کر سکتا ہے

= م ج × ط ل = م ج (ی — لا)۔

پس مقام ط پر توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ

= م ج ی

لیکن ک پر ذرے کی توانائی بالقوہ م ج ی ہے اور اس کی توانائی بالفعل صفر ہے۔

پس توانائی بالقوہ اور توانائی بالفعل کا مجموعہ ط پر وہی ہے جو ک پر ہے۔ اور چونکہ ط کوئی سا نقطہ ہے اس لئے ان دونوں مقداروں کا مجموعہ دوران حرکت میں ایک ہی رہتا ہے۔

یہ واضح رہے کہ جب ذرے کو زمین سے اٹھاکر مقام ک پر رکھا گیا تھا تو اس عمل سے ذرے میں توانائی بالقوہ کا ذخیرہ جمع ہو گیا تھا۔ اور جب ذرہ ک سے گرنا شروع کرتا ہے تو اس کی توانائی بالقوہ شکل بدل کر توانائی بالفعل کی صورت میں نمودار ہوتی ہے اور

یہ تبدیلی برابر جاری رہتی ہے جب تک کہ ذرہ زمین پر نہیں پہنچ جاتا۔ اس وقت تبدیلی مکمل ہو جاتی ہے اور توانائی بالقوہ کا ذخیرہ بالکل ختم ہو جاتا ہے اب رقاص کی حرکت پر غور کرو۔ جب رقاص کا گولا اپنے بلند ترین مقام پر پہنچ کر ایک آن کیلئے ساکن رہتا ہے تو اس وقت اس میں توانائی بالقوہ ہوتی ہے اور جب اس مقام سے حرکت کرکے گولا پست ترین مقام پر پہنچتا ہے تو توانائی بالقوہ بالتدریج بدل کر توانائی بالفعل کی صورت اختیار کرتی ہے۔ اور پھر جب وہاں سے حرکت کرکے دوسری طرف بلند ترین مقام تک پہنچتا ہے تو اس کی توانائی بالفعل بالتدریج بدل کر توانائی بالقوہ کی صورت میں آجاتی ہے۔ اور یہ عمل جاری رہتا ہے۔

(۹۴) دفعہ سابقہ کی مثال **اصول بقاء توانائی** کی ایک سادہ تمثیل ہے جو اس طرح بیان کیا جاسکتا ہے

اگر ایک جسم یا جسموں کا ایک نظام قوتوں کے ایک بقائی نظام کے زیر عمل حرکت کر رہا ہو تو اس کی توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ نہیں بدلتا۔ عالم مادی میں جو قوتیں ظہور پذیر ہوتی ہیں وہ اس صورت میں بقائی کہلاتی ہیں جب ان کا انحصار

نظام اجسام متعلقہ کی صرف وضع یا تشکیل پر ہو اور
ان کی رفتار یا سمتِ حرکت پر نہ ہو۔
مثلاً دو جسموں کی رگڑ یا ہوا کی مزاحمت بقائی قوتیں
نہیں ہیں کیونکہ رگڑ ایسی قوت ہے جس کی سمت
جسم کی حرکت کی سمت بدلنے سے بدل جاتی ہے
اور ہوا کی مزاحمت اس طرح بدلتی ہے جسطرح جسم کی
رفتار کی کوئی قوت۔
بقائی قوتوں کی صورت میں اگر جسموں کا نظام ایک
وضع یا شکل سے نقل مکان کرکے دوسری وضع یا
شکل اختیار کرے تو ایسا کرنے میں جو کام کی مقدار
صرف ہوئی وہ ہمیشہ ایک ہی رہتی ہے۔ کام کی
مقدار کا انحصار اس راستے یا طریق پر نہیں ہے جو
نقل مکان کرنے میں وہ جسم اختیار کریں۔
دفعہ ۷۷ کی مثال لو جس میں ایک ذرہ ایک کھردری
مائل سطح پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔ سطح کا طول
ل ہے۔ جب ذرہ زمین پر پہنچتا ہے تو اس کی
توانائی بالفعل

$$= \frac{1}{2} \text{م} \left[\text{۲ ج ل (جب عہ - رجم عہ)} \right]$$

یعنی م ج ل جب عہ - م ج ل رجم عہ
اور زمین پر پہنچ کر توانائی بالقوہ صفر ہوگی۔ اس لئے

وہاں توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ کا مجموعہ
م ج ل جب عہ - م ج ل ر جم عہ ہوگا۔
لیکن سطح مائل کی چوٹی پر توانائی بالقوہ م ج ل جب عہ ہے۔
اس لئے اگر ذرہ سطح مائل کی چوٹی سے پایہ تک پھسلے
تو اس کی مری جیلی توانائی کا مجموعی نقصان ر م ج ×
ل جم عہ ہوگا۔ یہ توانائی صورت بدل کر حرارت
کی شکل میں نمودار ہوتی ہے۔ کچھ حرارت متحرک
ذرے میں اور کچھ سطح مائل میں پیدا ہوتی ہے
اور آخر کار یہ حرارت ہوا میں منتشر ہو جاتی ہے۔
توانائی بالفعل کے نقصان کی اور مثالیں دفعہ ۸۶
کے حل کردہ سوالات میں ہیں۔

ہر دو صورتوں میں صدمے سے پہلے توانائی بالفعل
یہ تھی۔

$$\frac{۱}{۲} \times ۳ \times ۱۳^{۲} + \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۳^{۲} = \frac{۱۸ + ۵۰۷}{۲} = ۲۶۲\frac{۱}{۲} \text{ فٹ پونڈل}$$

پہلی مثال میں صدمے کے بعد توانائی بالفعل یہ ہوگی

$$\frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۹^{۲} = \frac{۴۰۵}{۲} = ۲۰۲\frac{۱}{۲} \text{ فٹ پونڈل}$$

اور دوسری مثال میں صدمے کے بعد توانائی بالفعل
یہ ہوگی

$$\frac{۱}{۲} \times ۵ \times \left(\frac{۳۳}{۵}\right)^{۲} = \frac{۱۰۸۹}{۱۰} = ۱۰۸٫۹ \text{ فٹ پونڈل}$$

اس لئے دونو صورتوں میں توانائی بالفعل کا نقصان بالترتیب ۶۰ اور ۱۵۳۶ء۶ فٹ پونڈ ہوگا۔

(۹۵) مثال (۱) ایک گولی جس کی کمیت ۴ اونس ہے ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ۲۰ پونڈ کمیت کے ایک ہدف میں لگتی ہے۔ ہدف بغیر روک کے حرکت کرسکتا ہے۔ توانائی بالفعل کا نقصان فٹ پونڈوں میں معلوم کرو۔

فرض کروکہ گولی ہدف پر لگنے کے بعد دونو کی مشترکہ رفتار ر ہے۔ چونکہ بموجب دفعہ ۸۶ معیارِ حرکت کا نقصان نہیں ہوا اس لئے

$$۱۲۰۰ \times \frac{۴}{۱۶} = \text{ر}\left(\frac{۴}{۱۶} + ۲۰\right)$$

$$\therefore \text{ر} = \frac{۴۰۰}{۲۷}$$

گولی کی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲} \times \frac{۴}{۱۶} \times ۱۲۰۰^۲ = ۱۸۰۰۰۰$ فٹ پونڈل

صدمے کے بعد گولی اور ہدف دونو کی مجموعی توانائی بالفعل $= \frac{۱}{۲}\left(۲۰ + \frac{۴}{۱۶}\right)\text{ر}^۲$

$= \frac{۲۰۰۰۰}{۹}$ فٹ پونڈل

توانائی بالفعل کا نقصان $= ۱۸۰۰۰۰ - \frac{۲۰۰۰۰}{۹}$

$= \frac{۱۶۰۰۰۰۰}{۹}$ فٹ پونڈل $= \frac{۵۰۰۰۰}{۹}$ فٹ پونڈ

اس سوال سے واضح ہو گا کہ اس صورت میں صدمے سے اگرچہ معیارِ حرکت کا نقصان نہیں ہوا۔ لیکن توانائی بالفعل کے $\frac{80}{81}$ حصے کی صورت بدل گئی۔
یہ معلوم ہوگا کہ صدمے کی تمام صورتوں میں توانائی بالفعل کا نقصان ہوتا ہے یا یوں کہو کہ توانائی بالفعل کی صورت بدل جاتی ہے۔

مثال (۲) دفعہ ۸۷ کی مثال میں توپ اور گولے کی توانائی بالفعل کا مقابلہ کرو۔

گولے کی توانائی بالفعل = $\frac{1}{2} \times 400 \times (900)^2$ فٹ پونڈل

$= \frac{200 \times 900^2}{32}$ فٹ پونڈ $= \frac{200 \times 900^2}{2240 \times 32}$ فٹ ٹن

$= 2260$ فٹ ٹن تقریباً

توپ کی توانائی بالفعل = $\frac{1}{2} \times 50 \times 2240 \times \left(\frac{45}{14}\right)^2$ فٹ پونڈل

$= \frac{25}{32} \times \left(\frac{45}{14}\right)^2$ فٹ ٹن $= 8.07$ فٹ ٹن تقریباً

اس سے ظاہر ہے کہ گولے کی توانائی بالفعل توپ کی توانائی بالفعل سے ۲۸۰ گنا ہے اگرچہ ان کے معیارِ حرکت برابر ہیں۔
گولے کی تباہ کن طاقت کی وجہ یہی ہے کہ اسکی توانائی بالفعل بہت زیادہ ہے۔

(۹۶) اگر جسموں کا کوئی نظام ایسا ہو جس کا تعلق

کسی دوسرے نظام سے نہ ہو تو اس میں اگر توانائی صورت بدل کر مختلف شکلوں میں نمودار ہو مثلاً حرارت۔ آواز۔ روشنی یا کوئی اور صورت جو بموجب طبیعیات جدید توانائی اختیار کر سکتی ہے تو ہمیں معلوم ہوگا کہ فی الحقیقت توانائی زائل یا ضائع نہیں ہوتی۔ یہ اصول جس سے ظاہر ہوتا ہے کہ توانائی نابود نہیں ہوتی جدید سائنس کا مرکزی اصول ہے۔ یہ بالفاظ ذیل بھی بیان ہو سکتا ہے۔

توانائی میں نہ تو اضافہ ہو سکتا ہے اور نہ اس میں کمی ہو سکتی ہے۔ نہ وہ از سر نو پیدا کی جا سکتی ہے اور نہ وہ نابود ہو سکتی ہے۔ لیکن ایک صورت بدل کر کوئی دوسری صورت اختیار کر سکتی ہے۔

یہ عددی مثال دی جاتی ہے کہ کام کے ۷۷۸ فٹ پونڈ اس قدر حرارت کے مساوی ہیں کہ ان سے ایک پونڈ پانی کی حرارت بقدر ایک درجہ فیرن ہائٹ بڑھ سکتی ہے۔ یعنی حرارت کا معادل جیلی ۷۷۸ فٹ پونڈ ہے۔

امثلہ نمبری (۱۵)

(۱) ۱۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۳۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اوپر وار سمت راس میں پھینکا جاتا ہے معلوم کرو کہ اس کی توانائی بالفعل کیا ہے (۱) بوقت

رمی (۲) نصف ثانیہ کے بعد (۳) ایک ثانیہ کے بعد۔

(۲) توپ کا ایک گولہ جس کی کمیت ۲۵ پونڈ ہے ۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا گیا ہے اسکی توانائی بالفعل فٹ پونڈوں میں دریافت کرو۔

(۳) ۱۰۰۰۰ گرام کمیت کا ایک توپ کا گولہ ۵۰۰۰ سینٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا گیا ہے۔ اسکی توانائی بالفعل ارگوں میں معلوم کرو۔

(۴) ۵۰۰۰ گرام کمیت کا ایک توپ کا گولہ ۵۰۰ میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے چلایا گیا ہے۔ اس کی توانائی بالفعل ارگون میں معلوم کرو اور اگر توپ حرکت کرنے کے لئے آزاد ہو اور اس کی کمیت ۱۰۰ کیلوگرام ہو۔ تو توپ کی توانائی بالفعل معلوم کرو۔

(۵) ۲ اونس کمیت کی ایک گولی ۱۲۸۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک ہدف میں چلائی جاتی ہے۔ ہدف کی کمیت ۱۰ پونڈ ہے اور وہ حرکت کرنے کے لئے آزاد ہے۔ صدمے کی وجہ سے توانائی بالفعل کا جو نقصان ہو وہ فٹ پونڈوں میں معلوم کرو۔

(۶) ۴ اونس کمیت کی ایک گولی ۱۲۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کررہی ہے اور ۱۵ پونڈ کمیت کا ایک توپ کا گولہ ۴۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کررہا ہے۔ دونو کی توانائی بالفعل اور معیارِ

حرکت کا مقابلہ کرو۔
اگر دونو کو یکساں قوتیں لگا کر یک ثانیہ میں ساکن کیا جائے۔ تو قوتوں کی مقدار معلوم کرو اور یہ بھی دریافت کرو کہ کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ہر ایک ساکن ہو گا؟

(۹۷) معیارِ حرکت اور توانائی کے اصولوں کے استعمال کی مزید تشریح کے لئے ہم ذیل میں اور مثالیں دیتے ہیں۔

مثال (۱) م پونڈ کمیت کا ایک ہتھوڑا ی فٹ کی بلندی سے ایک کھونٹے کے سر پہ گرتا ہے۔ ہتھوڑے کی چوٹ سے کھونٹا ا فٹ زمین میں جاتا ہے۔ زمین کی مزاحمت دریافت کرو۔ کھونٹے کی کمیت ک پونڈ ہے یہ تسلیم کرلیا جائے کہ زمین کی مزاحمت یکساں ہے اور کھونٹے میں لچک نہیں ہے۔
کھونٹے کی مدتِ حرکت بھی معلوم کرو اور یہ بھی دریافت کرو کہ صدمے سے کس قدر توانائی بالفعل کا نقصان ہوا؟
فرض کرو کہ کھونٹے کے سر پہ لگنے کے وقت ہتھوڑے کی رفتار ب ہے تو

ب^۲ = ۲ ج ی ․․․․․․․․․ (۱)

فرض کرو کہ صدمے کے عین بعد ہتھوڑے کی رفتار

ر ہے تو بقاءِ معیارِ حرکت کے اصول سے

(م + ک) ر = م ب ...... (۲)

فرض کرو کہ زمین کی مزاحمت پونڈوں میں ط ہے۔ تو زمین کے اندر کھونٹے کی حرکت کو روکنے والی

قوت = ط − (م + ک) ج

بقاء توانائی کے اصول سے

½ (م + ک) ر² = [ط − (م + ک) ج] × ا

∴ ط = (م + ک) ج + (م + ک) ر² / ۲ا

= (م + ک) ج + م² / (م + ک) × ب² / ۲ا بذریعہ (۲)

= (م + ک) ج + م² / (م + ک) × ج × ی / ا

اس سے ظاہر ہے کہ اگر م² / (م + ک) × ی / ا پونڈ وزن کھونٹے کے سر پر رکھا جائے تو زمین کی مزاحمت پر عین غالب آکر کھونٹے کو زمین کے اندر داخل کر دیگا۔

معیارِ حرکت کے اصول سے کھونٹے کی مدتِ حرکت و حاصل ہوتی ہے۔ کیونکہ

[ط − (م + ک) ج] × و = معیارِ حرکت کی تبدیلی

$$= (\text{م} + \text{ک})\,\text{ر} = \text{م}\,\text{ب}$$

$$\text{م}\,\text{ب} = \frac{\text{م}^{۲}}{\text{م}+\text{ک}} \times \frac{\text{ب}^{۲}}{۲\,\text{ا}} \times \text{و} \quad \text{اس لئے}$$

$$\therefore\ \text{و} = \frac{\text{م}+\text{ک}}{\text{م}} \times \frac{۲\,\text{ا}}{\text{ب}}$$

$$= \frac{\text{م}+\text{ک}}{\text{م}}\ \text{ا}\sqrt{\frac{۲}{\text{ج}\,\text{ی}}}$$

صدمے سے توانائی بالفعل کا نقصان

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\text{ب}^{۲} - \frac{۱}{۲}(\text{م}+\text{ک})\,\text{ر}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\text{م}\,\text{ب}^{۲} - \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{م}^{۲}}{\text{م}+\text{ک}} \times \text{ب}^{۲}$$

$$= \frac{۱}{۲}\,\frac{\text{م}\,\text{ک}}{\text{م}+\text{ک}} \times \text{ب}^{۲}$$

$= \frac{\text{ک}}{\text{م}+\text{ک}} \times$ ہتھوڑے کی توانائی بوقت صدمہ۔

ک کے مقابلے میں م جس قدر زیادہ ہو یعنی ہتھوڑے کی کمیت بمقابلہ کھونٹے کی کمیت کے جس قدر زیادہ ہو اسی قدر کم توانائی کا نقصان ہو گا۔

مثال (۴) بائی سکل کی حرکت۔ ایک بائی سکل اور اس کے سوار کا مجموعی وزن ۲۰۰ پونڈ کے وزن کے

مساوی ہے ۔ سائیکل سوار ایک مستوی سڑک پر ۱۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہا ہے اور جب اسکے پاؤں ایک پوری گردش کرتے ہیں تو بائی سکل $\pi \times ۷۰$ انچ آگے بڑھتی ہے۔ اور بائی سکل کے کرینک کا طول ۷ انچ ہے ۔ اگر اس کی حرکت کے متقابل مزاحمت ۵ پونڈ وزن ہو تو دریافت کرو کہ سوار اپنے پاؤں سے کس قدر زور لگاتا ہے اور اس کے کام کی شرح کا مقابلہ ایک اسپی طاقت سے کرو۔ پاؤں کے زور کو یکساں قوت تسلیم کرکے فرض کرو کہ وہ ط پونڈ وزن ہے تو ایک پوری گردش میں کام کی مقدار = $۲ \times ط \times \frac{۱۴}{۱۲}$ فٹ پونڈ اس مدت میں مزاحمت کے مقابلے میں جو کام کیا گیا اس کی مقدار = $\pi \times \frac{۷۰}{۱۲} \times ۵$ فٹ پونڈ یہ تسلیم کرلو کہ رگڑ کی وجہ سے کام کا نقصان نہیں ہوتا یعنی یہ کہ بائی سکل نظرًا ایک کامل مشین ہے۔ اس لئے دونو کاموں کو مساوی رکھنے سے

$$۵ \times \frac{۷۰}{۱۲} \times \pi = \frac{۱۴}{۱۲} \times ط \times ۲$$

یعنی $ط = \frac{۲۵}{۲}\pi = ۳۹\frac{۱}{۴}$ پونڈ وزن تقریباً

سوار کا کام فی گھنٹہ = $۵ \times (۵۲۸۰ \times ۱۰)$ فٹ پونڈ

∴ کام فی منٹ = $۵ \times ۸۸ \times ۱۰$

∴ کام کی شرح = $\frac{۱۰ \times ۸۸ \times ۵}{۳۳۰۰۰}$ اسپی طاقت

$$\frac{۲}{۱۵} = \text{اسپی طاقت}$$

اگر سائیکل سوار ایک سطح مائل پر اسی رفتار سے چڑھ رہا ہو اور سطح کا میلان ۵۰ میں ایک ہو تو دریافت کرو کہ پاؤں سے کس قدر قوت لگا رہا ہے۔

پاؤں کی پوری گردش سے بائی سکل $\pi \times ۷۰$ انچ یعنی $\pi \times \frac{۷۰}{۱۲}$ فٹ آگے بڑھتی ہے یعنی وہ اور اس کی مشین $\pi \times \frac{۷۰}{۱۲} \times \frac{۱}{۵۰}$ فٹ سمت راس میں اوپر وار چڑھتے ہیں۔ ایسا کرنے میں $\pi \times \frac{۷۰}{۱۲} \times \frac{۲۰۰}{۵۰}$ فٹ پونڈ مزید کام کرنا پڑے گا۔ لہذا اس صورت میں

$$\frac{۲۰۰}{۵۰} \times \frac{۷۰}{۱۲} \times \pi + ۵ \times \frac{۷۰}{۱۲} \times \pi = \frac{۱۴}{۱۲} \times ط \times ۲$$

$$\therefore ط = \frac{\pi ۴۵}{۲} = ۷۰\frac{۳}{۴}$$ پونڈ وزن تقریباً

امثلہ نمبری (۱۶)

(۱) م کمیت کا ایک گولہ ن کمیت کی ایک توپ سے چلایا جاتا ہے اور چلتے وقت گولے کی رفتار بلحاظ توپ کے ب ہے۔ ثابت کرو کہ گولے اور توپ کی اصلی رفتاریں بالترتیب $\frac{ن\ ب}{م + ن}$ اور $\frac{م\ ب}{م + ن}$ ہیں۔ نیز یہ بھی ثابت کرو کہ ان کی توانائی بالفعل ان کی کمیتوں کی عکسی نسبت کے متناسب ہیں۔

(۲) ایک توپ ایک گاڑی پر چڑھائی گئی ہے جو ایک چکنی مستوی سطح پر حرکت کرسکتی ہے۔ توپ کا میلان افق سے عہ ہے۔ توپ سے ایک گولہ چلایا جاتا ہے جو توپ کے منہ سے نکلتے وقت افق سے زاویہ تہ بناتا ہے۔ اگر توپ اور اس کی گاڑی کی کمیت گولے کی کمیت سے ن گنا ہو تو ثابت کرو کہ

$$\text{مس تہ} = \left(1 + \frac{1}{\text{ن}}\right) \text{مس عہ}$$

(۳) نصف ٹن کمیت کا ایک جسم ۸۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ایک ثابت ہدف پر جاکر لگتا ہے۔ اور $\frac{1}{100}$ ثانیہ میں ساکن ہو جاتا ہے۔ ہدف پر صدمے کی مقدار معلوم کرو۔ اور یہ تسلیم کرکے کہ جسم کے ساکن ہونے تک ہدف کی مزاحمت یکساں ہے دریافت کرو کہ جسم ہدف کے اندر کسقدر داخل ہوگا؟

(۴) ۴ ہنڈرڈ ویٹ کمیت کا ایک جسم ۱۰ فٹ کی بلندی سے ۱۲ ہنڈرڈ ویٹ کمیت کے ایک بے لچک کھونٹے پر آکر گرتا ہے۔ یہ تسلیم کرکے کہ کھونٹے کے دخول کے مقابلے میں زمین کی مزاحمت یکساں ہے اور $1\frac{1}{2}$ ٹن وزن کے مساوی ہے

دریافت کرو کہ ایک چوٹ سے کھونٹا کس قدر فاصلہ زمین کے اندر داخل ہوگا اور اس فاصلے کے طے کرنے میں کس قدر وقت صرف ہوگا؟

یہ بھی معلوم کرو کہ ہر ایک چوٹ میں توانائی کی کونسی کسر منتشر ہوتی ہے؟

۵- ایک لکڑی جس کی کمیت ۵۰ کیلو گرام ہے پانی کی سطح پر تیر رہی ہے، ایک بندوق سے جس کی نالی ا میٹر لمبی ہے ایک ۲۰ گرام وزنی گولی ۲۰۰ میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے لکڑی کی سیدھ میں چلائی گئی ہے، اگر گولی بغیر لکڑی کو گھمانے یا اسکے ٹکڑے الگ کرنے کے لکڑی کے اندر داخل ہو جائے تو گولی مارنے کے فوراً بعد لکڑی کی رفتار دریافت کرو۔ نیز بارود کی اوسط قوت گولی پر گراموں میں دریافت کرو۔

(۶) ایک ہتھوڑے کی کمیت ۴ ہنڈرڈ ویٹ ہے، یہ ۴ فٹ کی بلندی سے نیچے گر کر ایک لوہے کے ٹکڑے پر آکر لگتا ہے اور وہاں ساکن ہو جاتا ہے، اگر ضرب کی مدت $\frac{1}{10}$ سیکنڈ ہو اور ہتھوڑے کی قوت لوہے پر یکساں فرض کی جائے تو اس قوت کی مقدار معلوم کرو۔

۷- ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے،

اس کے سروں پر دو وزن جنکی کمیتیں م اور ۲م ہیں باندھ دئے گئے ہیں، ۲ سیکنڈ کے بعد اوپر چڑھنے والے جسم کے ساتھ ایک وزن جسکی کمیت م ہے شریک ہوجاتا ہے، اس کے بعد اس نظام کی حرکت دریافت کرو۔

۸۔ دو مساوی کمیتوں والے جسموں ا اور ب کو ایک ۳ فٹ لمبے بے لچک ڈورے میں منسلک کرکے ایک چکنی افقی میز پر ایک دوسرے کے نزدیک رکھدیا گیا ہے اور ان کا فاصلہ قریب ترین کنارہ سے ۳$\frac{1}{2}$ فٹ ہے، نیز ب کو ایک مساوی کمیت والے جسم ج کے ساتھ جو کنارہ پر سے نیچے لٹکتا ہے ایک تنے ہوئے بے لچک ڈورے کے ذریعہ منسلک کردیا گیا ہے، ان اجسام کی رفتار دریافت کرو جب ا حرکت کرنا شروع کرے، نیز جب ب میز کے کنارہ پر پہنچے۔

۹۔ دو جسم جنکی کمیتیں بالترتیب ۵ اور ۷ پونڈ ہیں ایک رسی کے ذریعہ جو ایک ثابت چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے منسلک کردئے گئے ہیں، ۳ سیکنڈ کے بعد بڑی کمیت والا جسم ایک ثابت بے لچک افقی سطح مستوی پر آکر ٹکراتا ہے، ثابت کرو کہ ۲$\frac{1}{4}$ سیکنڈ کے بعد یہ نظام ایک آن کے لئے ساکن ہوگا۔

۱۰- ایک رسی ایک چرخی پر سے گذرتی ہے، اس کے ایک طرف ایک ۵ پونڈ کی کمیت کا وزن بندھا ہے اور دوسری طرف دو وزن ۲ اور ۳ پونڈ کی کمیت کے ایک دوسرے سے ۱ فٹ کے فاصلے پر بندھے ہیں، نیچے والے وزن ۲ پونڈ کو یک لخت اوپر اٹھاکر ۳ پونڈ کے وزن کے برابر لایا گیا ہے اور نیچے گرنے سے روکنے کے لئے اس کو اس مقام پر تھاما گیا ہے۔ ثابت کرو کہ رسی آدھے سیکنڈ میں کس جائیگی اور اس کے بعد کل نظام ۲ ۳ فٹ فی سیکنڈ کی یکساں رفتار سے حرکت کرے گا۔

۱۱- ایک رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے، اس کے سروں پر دو مساوی وزن ن اور ق بندھے ہیں اور یہ دونوں ایک مشترک رفتار سے حرکت کر رہے ہیں، ق اوپر چڑھتا ہے اور ن نیچے اترتا ہے، اگر ن کو یک لخت ٹھیرا کر فوراً چھوڑدیا جائے تو معلوم کرو کہ رسی کو دوبارہ کس جانے میں کتنا وقت لگیگا۔

۱۲- ایک جسم جسکی کمیت م ہے فاصلہ ا بے روک نیچے گرتا ہے اور اس کے بعد اپنے سے ایک بڑے جسم کو جسکی کمیت م۱ ہے اوپر اٹھانے لگتا ہے جس کے ساتھ یہ ایک بے لچک رسی کے

ذریعہ منسلک ہے، یہ رسی ایک ثابت چرخی پر سے گذرتی ہے۔ ثابت کرو کہ م۱ اپنے اصلی مقام پر وقت $\frac{۲م}{م_۱ - م}\sqrt{\frac{۲ر}{ج}}$ کے بعد واپس آجائے گا جہاں ج قوت جاذبہ کی قیمت ہے،

نیز معلوم کرو کہ جب جسم م۱ جھٹکا کھانے کے بعد حرکت شروع کرتا ہے تو ہم کی مرئی توانائی کی کونسی کسر ضائع ہوجاتی ہے؟

۱۳۔ ایک ہلکی بے لچک رسی ایک ہلکی چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے اور اس کے سروں پر دو وزن ۱۲ اونس اور ۹ اونس کی کمیتوں کے بندھے ہیں، ۹ اونس کے وزن پر ایک ۷ اونس وزنی سلاخ رکھ دی گئی ہے اور جب ۹ اونس کا وزن محل سکون سے ۷ فٹ نیچے گرتا ہے تو سلاخ ایک ثابت چھلے کے ذریعہ اس پر سے اٹھالی جاتی ہے، معلوم کرو کہ ۹ اونس کا وزن اور کتنا نیچے گریگا؟ اگر ۹ اونس کا وزن چھلے میں سے اوپر گذرتے وقت سلاخ کو اپنے ساتھ اوپر لے جائے اور نیچے گرتے وقت سلاخ کو پیچھے چھوڑ دے تو معلوم کرو کہ کتنے وقت میں یہ نظام پھر ساکن ہو جائیگا؟

۱۴۔ دو ریل گاڑیاں ایک دوسرےکے ساتھ ساتھ

مختلف رفتاروں سے چل رہی ہیں، اگر ان کے مسافروں کا باہم تبادلہ کرتے جائیں تو اس عمل کا آخر الامر کیا نتیجہ ہوگا؟

۱۵۔ ایک شخص وزنی ۱۲ سٹون ۱۱۰۰۰ فٹ اونچے پہاڑ پر ۷ گھنٹے میں چڑھ جاتا ہے اور اسکے راستہ کی مشکلات اس کے مساوی ہیں کہ اس کو تمام راستہ ایک ۳ سٹون کا وزن اٹھانا پڑے، اگر راستہ میں مشکلات نہ ہوں تو واٹ کا ایک گھوڑا اس شخص کو اسی بلندی پر ۵۶ منٹ میں کھینچ کر لے جا سکتا ہے، ثابت کرو کہ گھوڑا اتنا کام کرتا ہے جتنا کہ ۶ ایسے آدمی کرتے ہیں۔

۱۶۔ ایک لوہار ایک ۱۴ پونڈ وزنی ہتھوڑے کو لوہے کی ایک سلاخ پر ۲۵ دفعہ فی منٹ مارتا ہے اور ہر ضرب کے بعد ہتھوڑے کو سلاخ پر ساکن ہو لینے دیتا ہے، اگر ہتھوڑے کی رفتار لوہے پر پڑنے سے پہلے ۳۲ فٹ فی سیکنڈ ہو تو اس کے کام کرنے کی شرح کا ایک اسپی طاقت کے ساتھ مقابلہ کرو۔

۱۷۔ ایک ہتھوڑا جس کی کمیت ۲۰ ٹن ہے بھاپ کے دباؤ کے زیر عمل جو ۳۰ ٹن وزن کے مساوی ہے ہر دفعہ سمت شاقولی میں ۵ فٹ نیچے گرتا ہے، بتاؤ کہ اس کی رفتار محصلہ کیا ہوگی اور ساکن ہونے سے

پہلے یہ کتنے فٹ پونڈ کام کریگا؟

(۱۸) ایک گاڑی وزنی ۱۵۰ ٹن ۵۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہی ہے، یک لخت اس کی بھاپ بند کردی گئی ہے اور بریک لگا دئے گئے ہیں اور یہ ۳۶۳ گز چلنے کے بعد ساکن ہو جاتی ہے، اگر مزاحمت کو یکساں فرض کیا جائے تو اس کی مقدار معلوم کرو اور اس کا کام فٹ پونڈوں میں دریافت کرو۔

(۱۹) ایک ریل گاڑی وزنی ۲۰۰ ٹن ایک ایسی سطح مائل پر جس کا چڑھاؤ ۱۰۰ میں ۱ ہے ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے اوپر چڑھ رہی ہے، سڑک کی مزاحمت فی ٹن ۸ پونڈ وزن کے مساوی ہے، اگر بھاپ بند کردی جائے اور بریک لگادئے جائیں تو گاڑی ایک چوتھائی میل کے بعد ساکن ہو جاتی ہے، بریک کی گاڑی کا وزن دریافت کرو۔ یہ معلوم ہے کہ لوہے پر لوہا پھسلنے سے جو رگڑ پیدا ہوتی ہے اس کی قدر ۱/۶ ہے۔

(۲۰) اگر ایک سائیکل سوار ہمیشہ ۱/۱۰ اسپی طاقت سے کام کرے اور ہموار سطح پر ۱۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جا سکے تو ثابت کرو کہ سڑک کی مزاحمت ۳٫۱۲۵ پونڈ کے وزن کے مساوی ہے۔

اگر سوار اور اُس کی مشین کی کمیت ۱۲ سٹون ہو تو ثابت کرو کہ ایک ایسی سطح مائل پر چڑھتے وقت جسکا چڑھاؤ ۵۰ میں ۱ ہے رفتار تقریباً ۵٫۸ میل فی گھنٹہ رہ جائے گی۔

(۲۱) ایک شخص چکنی ہموار سڑک پر $16\frac{1}{2}$ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے سائیکل چلا سکتا ہے اور وہ ہر پاؤں کے ساتھ اوپر سے نیچے جانے والی ضرب میں جس کا طول ۱۲ انچ ہے ۲۰ پونڈ وزن کے مساوی دباؤ ڈالتا ہے، اگر پاؤں کی ایک گردش سے مشین ۶۳ انچ آگے بڑھے تو اس کے کام کرنے کی شرح فی منٹ دریافت کرو۔

(۲۲) ایک بندوق کی گولی ایک تختہ میں سے گذرنے سے اپنی رفتار کا $\frac{1}{n}$ کھو دیتی ہے، معلوم کرو کہ ساکن ہونے سے پہلے یہ کتنے ایسے تختوں میں سے گذر جائے گی، اس میں فرض کرو کہ تختوں کی مزاحمت یکساں ہے۔

(۲۳) ایک شخص کشتی چلانے میں ڈانڈ کی ہر ضرب سے ع فٹ پونڈ کام کرتا ہے اور یہ کام کشتی چلانے میں کار آمد ہوتا ہے، اگر کشتی ن میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہی ہو تو پانی کی کل مزاحمت ل پونڈ کے وزن کے مساوی ہوتی ہے، بتاؤ کہ وہ شخص فی منٹ

کتنی ضربیں لگاتا رہے کہ کشتی کی رفتار میں فرق نہ آئے۔

(۲۴) ایک بائی سکل پاؤں کی ایک گردش سے ۲۲۷۰ انچ آگے بڑھتی ہے، سائیکل سوار $\frac{۱}{۱۰}$ اسپی طاقت سے کام کرتا ہے اور اپنے پاؤں کے ساتھ ۶۰ گردشیں یا چکر فی منٹ لگاتا ہے، اگر رگڑ کو نظر انداز کیا جائے تو اسکی حرکت کے خلاف جو مزاحمت ہے اسکی مقدار معلوم کرو اور اگر پائدان کی ڈنڈی کا طول $۶\frac{۳}{۴}$ انچ ہو تو اس کے پائدان پر جو دباؤ نیچے کی طرف پڑتا ہے اس کو معلوم کرو (اس دباؤ کو مستقل فرض کرو)

(۲۵) ایک سوار اور اسکی بائی سکل دونوں کی کمیت ۱۸۰ پونڈ ہے، مشین ایک سطح مائل پر جس کا میلان ۶۰ میں ۱ ہے ۸ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے نیچے کی طرف بلا تکلف جارہی ہے، ثابت کرو کہ اگر سوار کو اسی رفتار سے ایک ایسی سطح مائل پر چڑھنا منظور ہو جس کا چڑھاؤ ۱۰۰ میں ۱ ہو تو اس کو ۱۰۲۴، اسپی طاقت کی شرح سے کام کرنا چاہیئے۔

(۲۶) ایک افقی ٹونٹی سے ۲۰۰ پونڈ پانی فی منٹ ۱۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے نکلتا ہے اور یہ پانی ایک ایسی ثابت عمودی تختی پر آکر لگتا ہے جس کی سطح ٹونٹی کی سمت پر عمود وار ہے، معلوم کرو کہ معیار حرکت کی کیا مقدار فی سیکنڈ ضائع ہوتی ہے

اور تختی پر جو قوت عمل کرتی ہے اسکی مقدار پونڈوں میں دریافت کرو۔
نیز جس شرح سے ٹونٹی توانائی پیدا کرتی ہے اُس کو معلوم کرو اور اسکو ایک ایسی طاقت کی رقوم میں بیان کرو

(۲۷) ایک ۲ اونس وزنی کیل کو ایک تختہ کے اندر ٹھوکنے کے لئے ایک ۳ پونڈ وزنی ہتھوڑے کو استعمال کیا گیا ہے، ہتھوڑا جس وقت کیل پر پڑتا ہے اسکی رفتار ۸ فٹ فی سیکنڈ ہوتی ہے، اگر ہر ضرب سے کیل آدھ انچ تختہ کے اندر چلی جائے تو کیل کے خلاف جو مزاحمت ہے اسکی مقدار معلوم کرو۔ اس سوال میں کیل اور ہتھوڑے دونوں کو بے لچک خیال کرو۔

ذروں کے کسی نظام کے مرکز جمود کی حرکت

۹۸- مسئلہ

اگر کسی آن میں کمیتوں $م_1$، $م_2$، $م_3$،...... کی رفتاریں ایک ثابت مستقیم خط کے متوازی بالترتیب $ر_1$، $ر_2$، $ر_3$... ہوں تو ان کمیتوں کے مرکز جمود کی رفتار اُسی آن میں خط مذکور کے متوازی

$$\frac{م_1 ر_1 + م_2 ر_2 + \dots}{م_1 + م_2 + \dots}$$ ہوگی

فرض کروکہ اس ثابت خط پر ایک ثابت نقطہ لیا گیا ہے اور اس نقطہ سے مفروضہ کمیتوں کے فاصلے آن زیر بحث میں بالترتیب لا_{1}، لا_{2}، لا_{3}، ..... ناپے گئے ہیں، اور فرض کروکہ $\overline{\text{لا}}$ انکے مرکز جمود کا فاصلہ ہے۔

تب (بموجب سکونیات دفعہ ۱۱۱)

$$\overline{\text{لا}} = \frac{\text{م}_{1}\,\text{لا}_{1} + \text{م}_{2}\,\text{لا}_{2} + \text{م}_{3}\,\text{لا}_{3} + \cdots\cdots}{\text{م}_{1} + \text{م}_{2} + \text{م}_{3} + \cdots}$$

فرض کروکہ ایک قلیل وقت ت گزرنے کے بعد ان کمیتوں کے فاصلے نقطہ معینہ سے $\text{لا}'_{1}$، $\text{لا}'_{2}$، ..... ہیں اور ان کے مرکز جمود کا فاصلہ $\overline{\text{لا}}'$ ہے، تب

$$\text{لا}'_{1} = \text{لا}_{1} + \text{ر}_{1}\,\text{ت}$$

$$\text{لا}'_{2} = \text{لا}_{2} + \text{ر}_{2}\,\text{ت}$$

$$\text{لا}'_{3} = \text{لا}_{3} + \text{ر}_{3}\,\text{ت}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\text{نیز } \overline{\text{لا}}' = \frac{\text{م}_{1}\,\text{لا}'_{1} + \text{م}_{2}\,\text{لا}'_{2} + \cdots\cdots}{\text{م}_{1} + \text{م}_{2} + \cdots\cdots\cdots}$$

$$\therefore\ \overline{\text{لا}}' - \overline{\text{لا}} = \frac{\text{م}_{1}(\text{لا}'_{1} - \text{لا}_{1}) + \text{م}_{2}(\text{لا}'_{2} - \text{لا}_{2}) + \cdots\cdots}{\text{م}_{1} + \text{م}_{2} + \cdots\cdots\cdots\cdots}$$

$$= \frac{\text{م}_{1}\,\text{ر}_{1}\,\text{ت} + \text{م}_{2}\,\text{ر}_{2}\,\text{ت} + \cdots\cdots\cdots}{\text{م}_{1} + \text{م}_{2} + \cdots\cdots\cdots}$$

لیکن اگر ثابت خط کے متوازی $\overline{\text{ر}}$ مرکز جمود کی رفتار ہے،

$$\text{تب}\quad \overline{\text{لو}}' = \overline{\text{لو}} + \overline{\text{ر}}\,\text{ت}$$

$$\therefore\ \overline{\text{ر}} = \frac{\overline{\text{لو}}' - \overline{\text{لو}}}{\text{ت}} = \frac{\text{م}_1\text{ل}_1 + \text{م}_2\text{ل}_2 + \cdots\cdots}{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \cdots\cdots}$$

اس لئے ذروں کے ایک نظام کے مرکز جمود کی رفتار کسی سمت مفروضہ میں ایک ایسی کسر کے مساوی ہے جس کا شمار کنندہ سمت مذکور میں ذروں کی حرکتوں کے معیاروں کے مجموعہ کے مساوی ہے اور جبکا نسب نما ذرون کی کمیتوں کے مجموعہ کے مساوی ہے۔

نتیجہ صریح اگر ذروں کا ایک نظام ایک ہی سطح میں حرکت کر رہا ہو اور ذروں کی رفتاریں مع اُن کی حرکت کی سمتوں کے معلوم ہوں تو ہم اُن رفتاروں کو دو ثابت خطوں کے متوازی تحلیل کرنے اور سابق مسئلہ کو استعمال کرنے سے ذروں کے مرکز جمود کی حرکت معلوم کر سکتے ہیں۔

۹۹- **مسئلہ** اگر کسی آن میں کمیتوں م_1، م_2، م_3 کے اسراع ایک ثابت خط کے متوازی بالترتیب ع_1، ع_2، ع_3، .... ہوں تو ان کمیتوں کے مرکز جمود کا اسراع اس خط کے متوازی $\dfrac{\text{م}_1\text{ع}_1 + \text{م}_2\text{ع}_2 + \cdots\cdots}{\text{م}_1 + \text{م}_2 + \cdots\cdots}$ ہوگا

اس مسئلہ کا ثبوت پچھلی دفعہ کے ثبوت کے بالکل متشابہ ہے، صرف ہمیں $\overline{لا}$، ر، $\overline{لا}$، رَ کی بجائے ر، ع، رَ، عَ، لکھنا چاہئے اور باقی ذروں کے لئے بھی اسی قسم کی تبدیلیاں کرنی چاہئیں۔

مثال (۱) دو کمیتیں م$_۱$، م$_۲$ ایک ہلکی رسی کے ذریعہ منسلک کردی گئی ہیں جیسا دفعہ ۱۴۷ میں، انکے مرکز جمود کا اسراع معلوم کرو

کمیت م$_۱$ کا اسراع شاقولی سمت میں $\frac{م_۱ - م_۲}{م_۱ + م_۲}$ ج ہے اور م$_۲$ کا اسراع مقدار میں تو یہی ہے مگر اسکی سمت اسکے متقابل ہے۔

اسلئے $ع_۱ = - ع_۲ = \frac{م_۱ - م_۲}{م_۱ + م_۲}$ ج، پس مرکز جمود کا اسراع

$$= \frac{م_۱ ع_۱ + م_۲ ع_۲}{م_۱ + م_۲} = \left(\frac{م_۱ - م_۲}{م_۱ + م_۲}\right)^۲ ج$$

مثال (۲) دو جسموں کی کمیتیں م اور ۳ م ہیں، یہ ایک ہلکی رسی کے ذریعہ جو ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے منسلک کردئے گئے ہیں۔ ثابت کروکہ ایسا کرنے سے جو حرکت پیدا ہوگی اس میں کمیتوں کے مرکز جمود کا اسراع $\frac{ج}{۴}$ ہوگا

مثال (۳) دو جسم جنکی کمیتیں ۶ اور ۴ پونڈ ہیں دو متوازی خطوں پر بالترتیب ۳ اور ۸ فٹ کی رفتاروں سے حرکت کر رہے ہیں، ان کے مرکز جمود کی رفتار دریافت کرو (۱) جبکہ وہ ایک ہی سمت میں حرکت کریں (۲) جبکہ وہ متقابل سمتوں میں حرکت کریں۔

جواب (۱) ۵ فٹ فی سیکنڈ (۲) $\frac{۲}{۵}$ ۱ فٹ فی سیکنڈ اُس سمت میں جس میں کہ دوسرا جسم حرکت کر رہا ہے۔

مثال (۴) دو جسم جنکی کمیتیں م ن اور م ہیں دو مستقیم خطوں کے نقطہ تقاطع سے ایک ہی وقت میں رفتارون ر اور ن ر کے ساتھ بالترتیب ان خطوں پر حرکت کرنا شروع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ ان کے مرکز جمود کا طریق ایک مستقیم خط ہے جو مفروضہ مستقیم خطون کے درمیانی زاویہ کی تصیف کرتا ہے۔

مثال (۵) دو جسم یکساں رفتار سے دو مستقیم خطوں پر حرکت کرتے ہیں، یہ خط ایک دوسرے کو ایک زاویہ معلومہ پر قطع کرتے ہیں، ثابت کرو کہ انکا مرکز جمود یکساں رفتار سے ایک مستقیم خط پر حرکت کرتا ہے۔

باب ہفتم

مرمیات

(۱۰۰) گذشتہ بابوں میں ہم نے ایسے جسموں کی حرکت پر بحث کی جو مستقیم خطوط میں حرکت کرتے تھے۔ اس باب میں ہم ایک ایسے ذرہ کی حرکت پر غور کرینگے جو ہوا میں کسی رفتار کے ساتھ کسی سمت میں پھینکا جائے۔ ہم فرض کرینگے کہ جسموں کی حرکت سطح زمین سے بلحاظ فاصلہ کے مناسب حدود کے اندر رہتی ہے اور اسلئے جو اسراع جاذبۂ ارض کی وجہ سے پیدا ہوتا ہے وہ قریب قریب مستقل خیال کیا جا سکتا ہے۔ نیز ہم ہوا کی مزاحمت کو نظرانداز کرینگے اور یہ فرض کرینگے کہ حرکت خلا میں ظہور پذیر ہوتی ہے، اور ایسا فرض کرنے کی دو وجوہ ہیں، اوّلاً ہوا کی مزاحمت کا قانون جبکہ ایک ذرہ اس میں حرکت کررہا ہو ٹھیک طور پر معلوم نہیں اور ثانیاً اگر یہ قانون معلوم بھی ہو تو ایسی بحث میں نظری ریاضی کے اصولوں کی وسیع واقفیت کی ضرورت

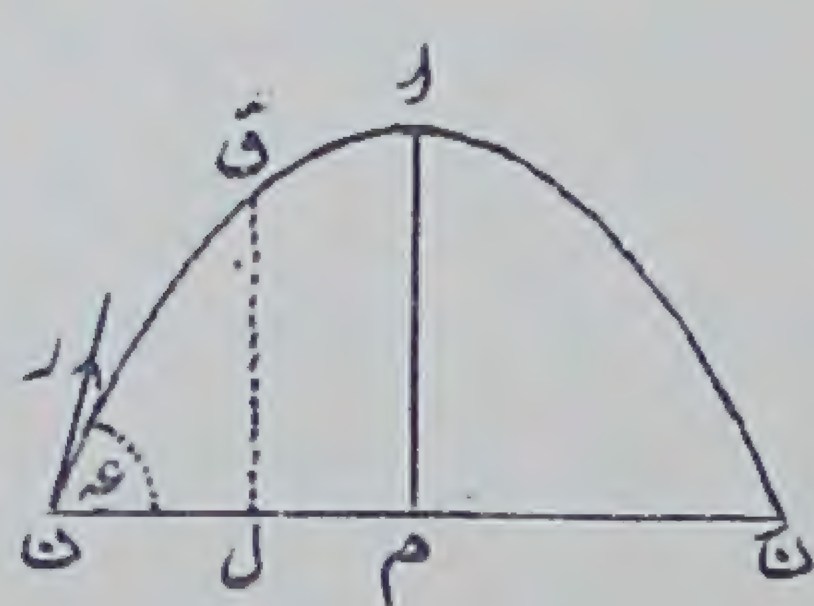
ہو گی اور اس کتاب کے پڑھنے والے سے اسقدر توقع نہیں کی جا سکتی ۔

تعریفات اگر کسی نقطہ سے کوئی ذرہ کسی خاص سمت میں ہوا کے اندر پھینکا جائے تو جو زاویہ یہ سمت ما نقطہ مذکورہ میں سے گزرنے والی افقی سطح کے ساتھ بناتی ہے اسکو **زاویۂ رمی** کہتے ہیں، جو راستہ ذرہ کی حرکت سے پیدا ہوتا ہے اسکو **خط مرمی** کہتے ہیں، نیز اگر نقطہ رمی میں سے کوئی ایک مستوی سطح کھینچی جائے اور ذرہ کا طریق (خط مرمی) اسکو ایک نقطہ پر ملے تو اس نقطہ اور نقطہ رمی کے درمیان جو فاصلہ ہے اس کو ذرہ کا **ٹپہ** اُس سطح پر کہتے ہیں، اور ابتدائی حرکت سے ذرہ کو جتنا وقت، نقطہ رمی میں سے گذرنے والی افقی سطح سے دوبارہ ملنے میں لگتا ہے اسکو **مدت پرواز** کہتے ہیں ۔

(۱۰۱) اگر زمین ایک ذرہ کو اپنی طرف نہ کھینچتی تو ہر ذرہ ہوا میں پھینکے جانے کے بعد ایک مستقیم خط میں حرکت کرتا، لیکن زمین کی کشش کی وجہ سے ذرہ کا راستہ ایک منحنی خط ہوتا ہے، دفعہ ۱۱۳ میں ہم ثابت کرینگے کہ یہ منحنی ہمیشہ قطع مکافی (شلجمی) ہوتا ہے ۔

فرض کرو کہ ن نقطہ رمی ہے، ر رفتار اور ع زاویۂ رمی ہے، نیز فرض کرو کہ ن ا ن َ ذرہ کا طریق ہے جسکا

سب سے اونچا نقطہ ا ہے اور ن وہ نقطہ ہے جہاں ذرہ کا طریق ن میں سے گذرنے والی افقی سطح سے ملتا ہے۔



قوتوں کے طبیعی استغنا کے اصول کی رو سے (دفعہ ۱۱) چونکہ جسم کا وزن ایک عمودی قوت ہے اسلئے صرف عمودی سمت میں ہی جسم کی حرکت پر اسکا اثر پڑسکتا ہے، پس افقی سمت میں جو جسم کی رفتار ہے اُسپر اس کا کوئی اثر نہیں ہو سکتا، اس لئے جسم کی افقی رفتار غیر متبدل رہتی ہے۔

ذرہ کی ابتدائی رفتار کے افقی اور عمودی اجزائے ترکیبی بالترتیب ر جم عہ اور ر جب عہ ہیں

اس لئے اثنائے حرکت میں افقی رفتار ہمیشہ ر جم عہ رہتی ہے۔

عمودی سمت میں ابتدائی رفتار ر جب عہ ہے اور اسراع - ج ،

[کیونکہ جاذبۂ ارض کی وجہ سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے وہ عمودی سمت میں نیچے کیطرف ج ہے اور ہم اپنی مثبت سمت کو اوپر کی طرف لے رہے ہیں]

اس لئے بلحاظ عمودی حرکت کے ذرہ زیر بحث کی حرکت ایک ایسے ذرہ کی حرکت کے متماثل ہوگی جو باسراع -ج سمت راس میں ابتدائی رفتار ر جب عہ سے پھینکا گیا ہو۔ پس اسطرح جو ذرہ زیر بحث کی حرکت حاصل ہوتی ہے وہ ایک ایسے ذرہ کی حرکت کے متماثل ہے جو ایک پتلی عمودی نلی میں رفتار ر جب عہ سے پھینکا گیا ہو جبکہ نلی افقی سمت میں رفتار ر جم عہ سے حرکت کرے۔

(۱۰۲) کسی وقت مفروضہ کے بعد ذرہ کی حرکت کی سمت اور رفتار معلوم کرو۔

فرض کرو کہ وقت ت گذرنے کے بعد مطلوبہ رفتار رَ افقی سمت سے زاویہ طہ بناتی ہے

تب رَ جم طہ = افقی رفتار وقت ت گذرنے کے بعد

= ر جم عہ ، مستقل افقی رفتار

نیز رَ جب طہ = عمودی رفتار وقت ت گذرنے کے بعد

= ر جب عہ - ج ت

اس لئے مربع لینے اور جمع کرنے سے

رَ^۲ = ر^۲ - ۲ ر ج ت جب عہ + ج^۲ ت^۲

اور تقسیم کرنے سے
$$\text{مس طہ} = \frac{\text{ر جب عہ} - \text{ج ت}}{\text{ر جم عہ}}$$

(۱۰۳) کسی ارتفاع مفروضہ پر حرکت کی سمت اور رفتار معلوم کرو ۔ فرض کرو کہ مفروضہ بلندی ب ا پر ذرہ کی رفتار رَ ہے اور رفتار کی سمت ، افق سے زاویہ طہ بناتی ہے ۔ اِسلئے اس نقطہ پر افقی اور عمودی رفتاریں بالترتیب رَ جم طہ اور رَ جب طہ ہیں۔ اس لئے

$$\text{رَ جم طہ} = \text{ر جم عہ} = \text{مستقل افقی رفتار} \quad (۱)$$

نیز دفعہ ۳۲ کی رو سے

$$\text{رَ جب طہ} = \sqrt{\text{ر}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{عہ} - \text{۲ ج ب}} \quad .....(۲)$$

(۱) اور (۲) کا مربع لینے اور جمع کرنے سے

$$\text{رَ}^{۲} = \text{ر}^{۲} - \text{۲ ج ب}$$

نیز عمل تقسیم سے
$$\text{مس طہ} = \frac{\sqrt{\text{ر}^{۲}\,\text{جب}^{۲}\,\text{عہ} - \text{۲ ج ب}}}{\text{ر جم عہ}}$$

(۱۰۴) معلوم کرو کہ اپنی مدت پرواز میں ایک مرمی کا بڑے سے بڑا ارتفاع کیا ہوتا ہے اور ابتدائے حرکت سے اس ارتفاع اعظم پر پہنچنے کے لئے کتنا وقت صرف ہوتا ہے ۔ فرض کرو کہ ا خط مرمی کا سب سے اونچا نقطہ ہے (دیکھو شکل دفعہ ۱۰۱) اب ضرور ہے کہ مرمی

نقطہ ا پر افقی سمت میں حرکت کر رہا ہو اس لئے
اس کی عمودی رفتار نقطہ ا پر صفر ہو گی
لہذا دفعہ ۳۲ کی رو سے
۰ = ر^۲ جب^۲ عہ - ۲ ج × م ا

∴ م ا = ر^۲ جب^۲ عہ / ۲ ج

جس سے ارتفاع اعظم حاصل ہوتا ہے
فرض کرو کہ ن سے ا تک کی پرواز کا وقت ت ا ہے،
تب ظاہر ہے کہ وقت ت میں عمودی رفتار ر جب عہ
جاذبۂ ارض کی وجہ سے فنا ہو جاتی ہے
اس لئے دفعہ ۳۲ کی رو سے ۰ = ر جب عہ - ج ت

∴ ت = ر جب عہ / ج

جس سے مطلوبہ وقت حاصل ہوتا ہے
(۱۰۵) نقطہ رمی میں سے گذرنے والی افقی سطح مستوی پر مرمی کا ٹپہ دریافت کرو، نیز اسکی مدت پرواز معلوم کرو۔

جب مرمی نقطہ نَ پر پہنچتا ہے (شکل دفعہ ۱۰۱) تو اس کا عمودی سمت میں طے کردہ فاصلہ صفر ہوتا ہے۔ تو اسلئے اگر ت مدت پرواز ہو تو دفعہ ۳۲ (۱) کی رو سے
۰ = ر جب عہ - ½ ج ت^۲

$\therefore$ ت۱ = $\frac{\text{۲ س۱ جب عہ}}{\text{ج}}$ = سب سے اونچے نقطہ تک پہنچنے کے وقت کا دو چند۔

اس تمام وقت ت۱ میں افقی رفتار کی مستقل قیمت س۱ جم عہ رہتی ہے

$\therefore$ ن نَ = افقی فاصلہ جو وقت ت۱ میں طے ہوا

= س۱ جم عہ × ت۱ = $\frac{\text{۲ س۱}^{2}\text{ جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}$

اسلئے معلوم ہوا کہ ٹپہ ایک ایسی کسر کے مساوی ہے جس کا شمار کنندہ ابتدائی عمودی اور افقی رفتارو کے حاصلِ ضرب کے دو چند کے برابر ہے اور جس کا نسب نما ج ہے

(۱۰۶) ہر می کی مفروضہ رفتار رمی س۱ کے لئے بڑے سے بڑا افقی ٹپہ دریافت کرو اور اس کے زاویہ رمی کی قیمت معلوم کرو۔

اگر زاویہ رمی عہ تو گذشتہ دفعہ کی رو سے افقی ٹپہ

= $\frac{\text{۲ س۱}^{2}\text{ جب عہ جم عہ}}{\text{ج}}$ = $\frac{\text{س۱}^{2}\text{ جب ۲ عہ}}{\text{ج}}$

نیز جب ۲ عہ کی قیمت بڑی سے بڑی اُسوقت ہو گی جبکہ ۲ عہ = ۹۰°

یعنی جبکہ عہ = ۴۵°

اسلئے ایک افقی سطح پر کا ٹپہ بڑے سے بڑا اُس وقت ہو گا جب مرمی کی ابتدائی سمت رمی، نقطہ رمی میں سے گذرنے والی افقی سطح سے ۴۵° کا زاویہ بنائے۔ پس بڑے سے بڑے افقی ٹپہ کی مقدار $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ جیب ۹۰° یعنی $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ ہو گی

(۱۰۷) اگر رفتار رمی کی مقدار معین کردی جائے تو افقی سطح پر ایک مفروض ٹپہ حاصل کرنے کے لئے مرمی کو پھینکنے کی بالعموم دو سمتیں ہونگی اور یہ بڑے سے بڑا ٹپہ حاصل کرنے والی سمت سے مساوی زاوئے بنائیں گی۔

اگر زاویہ رمی عہ ہو تو دفعہ ۱۰۵ کی رو سے ٹپہ $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ × جیب ۲ عہ ہو گا،

نیز اگر زاویہ رمی $\frac{\pi}{2}$ − عہ ہو تو ٹپہ = $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ جیب ۲ ($\frac{\pi}{2}$ − عہ)

= $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ جیب (π − ۲ عہ) = $\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$ جیب ۲ عہ

اس سے معلوم ہوا کہ زوایاء رمی عہ اور $\frac{\pi}{2}$ − عہ دونوں سے ایک ہی افقی ٹپہ حاصل ہوتا ہے۔

یہ سمتیں افقی اور عمودی سمتوں سے بالترتیب مساوی زاوئے بناتی ہیں اور اس لئے بڑے سے بڑا ٹپہ پیدا کرنے والی سمت سے جو افقی اور عمودی سمتون کی تنصیف کرتی ہے مساوی زاوئے بناتی ہیں۔

(۱۰۸) مثال (۱)۔ ایک گولی ۶۴۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے

پھینکی گئی ہے اور اسکی سمت رمی افق کے ساتھ ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے تو (۱) مرمی کی بڑی سے بڑی اونچائی دریافت کرو (۲) افقی سطح پر کا ٹپہ اور مدت پرواز معلوم کرو (۳) جب گولی ۷۶ء۵ فٹ کی اونچائی پر ہو تو گولی کی سمت حرکت اور رفتار معلوم کرو

ابتدائی افقی رفتار $= \text{۶۴۰ جتم ۳۰°} = \text{۶۴۰} \times \frac{\sqrt{\text{۳}}}{\text{۲}} = \text{۳۲۰}\sqrt{\text{۳}}$ فٹ فی سیکنڈ اور ابتدائی عمودی رفتار $= \text{۶۴۰ جب ۳۰°} = \text{۳۲۰}$ فٹ فی سیکنڈ

(۱) اگر فرض کیا جائے کہ بڑی سے بڑی مطلوبہ اونچائی ب ہے تو ب وہ فاصلہ ہوگا جو ایک ذرہ ۳۲۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے شروع ہوکر باسراع (-ج) حرکت کرکے ساکن ہو جانے تک طے کرے۔

$$\therefore \text{۰} = \text{۳۲۰}^{\text{۲}} - \text{۲ ج ب}$$

$$\therefore \text{ب} = \frac{\text{۳۲۰}^{\text{۲}}}{\text{۳۲}\times\text{۲}} = \text{۱۶۰۰ فٹ}$$

(۲) اگر مدت پرواز ت ہو تو ت سیکنڈ میں جو عمودی فاصلہ طے ہوا وہ صفر کے برابر ہے۔

$$\therefore \text{۰} = \text{۳۲۰} \times \text{ت} - \frac{\text{۱}}{\text{۲}}\,\text{ج ت}^{\text{۲}}$$

$$\therefore \text{ت} = \frac{\text{۶۴۰}}{\text{ج}} = \text{۲۰ سیکنڈ}$$

افقی ٹپہ = اس فاصلہ کے جو ایک ذرہ $\text{۳۲۰}\sqrt{\text{۳}}$ فٹ

فی سیکنڈ کی مستقل رفتار سے ۲۰ سیکنڈ میں طے کرتا ہے

$$= ۲۰ \times ۳۲۰\sqrt{۳} = ۱۱۰۸۵$$ فٹ تقریباً

(۳) اگر ۵۷۶ فٹ کی اونچائی پر رفتار ر ہو اور اس وقت مرمی کی سمت پرواز افق کے ساتھ زاویہ ط بنائے تو

$$ر^{۲} \text{جب}^{۲} ط = ۳۲۰^{۲} - ۲ ج \times ۵۷۶ = ۳۲^{۲} \times ۶۴$$

$$\text{اور } ر^{۲} \text{جم}^{۲} ط = (۳۲۰\sqrt{۳})^{۲} = ۳۲^{۲} \times ۳۰۰$$

اس لئے عمل جمع سے

$$ر = ۳۲ \times \sqrt{۳۶۴} = ۶۱۰٫۵$$ فٹ فی سیکنڈ

نیز عمل تقسیم سے

$$\text{مس} ط = \sqrt{\frac{۱۶}{۷۵}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۱۵} = ۰٫۴۶۱۸۸$$

طبعی مماسات کے جدول سے معلوم ہوگا کہ ط = ۲۴° ۴۷′ تقریباً

مثال (۲)۔ کرکٹ کا ایک گیند ۹۶ فٹ سیکنڈ کی ابتدائی رفتار سے پھینکا گیا ہے، افقی سطح پر بڑے سے بڑا ٹپہ معلوم کرو اور نیز دریافت کرو کہ کن دو سمتوں میں گیند پھینکا جائے کہ ٹپہ ۱۴۴ فٹ ہو؟

اگر زاویہ رمی ع ہو تو ٹپہ دفعہ ۱۰٫۵ کی رو سے

$$= \frac{۲ \times ۹۶^{۲} \text{جب} ع \text{جم} ع}{ج} = \frac{۹۶^{۲} \text{جب} ۲ع}{ج}$$

بڑے سے بڑا ٹپہ اس وقت حاصل ہوگا جبکہ عہ = ۴۵°
اور اسلئے

$$= \frac{۹۶^۲}{۳۲} = ۲۸۸ \text{ فٹ} = ۹۶ \text{ گز}$$

اگر ٹپہ ۱۴۴ فٹ ہو تو زاویہ عہ مساوات ذیل سے حاصل ہوگا

$$\frac{۹۶^۲}{ج} \text{ جب ۲ عہ} = ۱۴۴$$

$$\therefore \text{جب ۲ عہ} = \frac{۳۲ \times ۱۴۴}{۹۶^۲} = \frac{۱۴۴}{۹۶ \times ۳} = \frac{۱}{۲}$$

$$\therefore \text{۲ عہ} = ۳۰^\circ \text{ یا } ۱۵۰^\circ$$

$$\therefore \text{عہ} = ۱۵^\circ \text{ یا } ۷۵^\circ$$

مثال (۳) ایک توپ کا گولہ ایک برج کی چوٹی سے جس کا ارتفاع ۴۹ فٹ ہے ۲۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے افقی سمت میں پھینکا گیا ہے، (۱) اس کی مدت پرواز معلوم کرو (۲) برج کے پائین سے اس نقطہ کا فاصلہ دریافت کرو جہاں یہ زمین پر آکر لگتا ہے۔ (۳) جب یہ زمین پر آکر لگتا ہے اسوقت اس کی رفتار معلوم کرو

(۱) گولے کی ابتدائی عمودی رفتار صفر ہے، اس لئے مدت پرواز ت سے وہ وقت تعبیر ہوتا ہے جسمیں ایک جسم، جاذبۂ ارض کے زیر عمل بلا تکلف گر کر فاصلہ ۴۹ فٹ طے کرتا ہے۔

اس لئے $۴۹ = \frac{۱}{۲} ج ت^۲ = ۱۶ ت^۲$

$\therefore$ $ت = \frac{۷}{۴}$ سیکنڈ

(۲) مدت پرواز میں افقی رفتار مستقل رہتی ہے

اس لئے پائین برج سے مطلوبہ فاصلہ $= ۲۰۰ \times \frac{۷}{۴} = ۳۵۰$ فٹ

(۳) $\frac{۷}{۴}$ سیکنڈ کے اختتام پر عمودی رفتار $=$ $۳۲ \times \frac{۷}{۴} = ۵۶$ فٹ فی سیکنڈ اور افقی رفتار ۲۰۰ فٹ فی سیکنڈ ہے

$\therefore$ مطلوبہ رفتار $= \sqrt{۲۰۰^۲ + ۵۶^۲} = ۸\sqrt{۶۷۴}$

$= ۲۰۷٫۷$ فٹ تقریباً

مثال (۴) ایک ٹیلے کی چوٹی سے جس کا ارتفاع ۸۰ فٹ ہے ایک پتھر ۸۰ فٹ فی سیکنڈ کی ابتدائی رفتار سے ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، معلوم کرو کہ پتھر زمین پر کہاں لگیگا؟

ابتدائی عمودی رفتار ۱۲۸ جب ۳۰° یا ۶۴ فٹ فی سیکنڈ ہے اور

ابتدائی افقی رفتار ۱۲۸ جم ۳۰° یا $۶۴\sqrt{۳}$ فٹ فی سیکنڈ ہے

فرض کرو کہ وقت ت گذرنے کے بعد پتھر زمین پر آکر لگتا ہے

تب ظاہر ہے کہ ت سے وہ وقت تعبیر ہوتا ہے جس میں ایک پتھر جو ۶۴ فٹ فی سیکنڈ کی عمودی رفتار سے پھینکا گیا ہو باسراع (- ج) حرکت کرکے فاصلہ (- ۸۰) فٹ طے کرتا ہے۔

$\therefore$ - ۸۰ = ۶۴ ت - $\frac{1}{2}$ ج ت^2

اسلئے ت = ۵ سیکنڈ

اس اثناء میں افقی رفتار نہیں بدلتی اسلئے ٹیلہ کے پائین سے اُس نقطہ کا فاصلہ جہاں پتھر جاکر زمین سے ٹکراتا ہے = ۳۲۰ $\sqrt{3}$ = ۵۵۴ فٹ تقریباً

امثلہ نمبری ۱۷

(۱) ایک ذرہ ر فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے زاویہ عہ بناتی ہے، بڑے سے بڑا ارتفاع، مدت پرواز اور افقی سطح پر کا ٹپہ دریافت کرو جبکہ

(۱) ر = ۶۴، عہ = ۳۰°

(۲) ر = ۸۰، عہ = ۶۰°

(۳) ر = ۹۶، عہ = ۴۵°

(۴) ر = ۲۰۰، عہ = جب$^{-1}$ $\frac{3}{5}$

(۲) ایک افقی سطح مستوی پر بڑے سے بڑا ٹپہ دریافت کرو جبکہ رفتار رمی (۱) ۴۸ (۲) ۶۰ (۳) ۱۰۰ فٹ فی سیکنڈ ہو۔

(۳) ایک گولی ایک بندوق سے ۱۶۰ میٹر فی سیکنڈ کی رفتار سے نکلتی ہے، معلوم کرو کہ زیادہ سے زیادہ یہ کہاں تک جاسکتی ہے اور اس کا ارتفاع اعظم کیا ہوگا؟

(۴)۔ ایک شخص ایک پتھر کو ۸۰ میٹر کی دوری تک پھینک سکتا ہے، معلوم کرو کہ پتھر کتنے عرصہ تک ہوا میں رہتا ہے اور بڑی سے بڑی کیا اونچائی حاصل کرتا ہے؟

(۵) ایک جسم ۸۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار کے ساتھ ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے زاویہ مس$^{-1}$ ۳ بناتی ہے، ثابت کرو کہ یہ ۹۰ فٹ کی عمودی بلندی تک پہنچیگا، اور اس کی سمت حرکت افق سے ۶۰° کا زاویہ بنائے گی جب اس کا عمودی ارتفاع زمین سے ۶۰ فٹ ہوگا،
نیز ثابت کرو کہ اس کی مدت پرواز ۴ ۳/۴ سیکنڈ ہوگی۔

(۶) ایک مرمی زمین سے ۹ فٹ کی بلندی سے افقی سمت میں پھینکا گیا ہے اور سطح زمین سے ۱۰۰ فٹ کے افقی فاصلہ پر آکر لگتا ہے، اس کی ابتدائی رفتار

معلوم کرو۔

(۷) ایک برج کی چوٹی سے جس کا ارتفاع ب ہے ایک پتھر افقی سمت میں رفتار √(۲ ج ب) کے ساتھ پھینکا گیا ہے، معلوم کروکہ زمین پر یہ کہاں جاکر لگیگا۔ نیز زمین پر ٹکرانے کے وقت اس کی رفتار کیا ہوگی؟

(۸) ایک ریلوے گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہی ہے اس کے فرش پر ۹ فٹ کی بلندی سے ایک پتھر پھینکا گیا ہے، جب یہ پتھر گاڑی کے فرش پر آکر لگتا ہے اس وقت اُس کی رفتار اور سمت، فضا میں معلوم کرو۔

(۹) ایک جہاز ۱۶ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے جارہا ہے اور اسکے مستول کی چوٹی سے جس کا ارتفاع ۱۴۴ فٹ ہے ایک جسم گرتا ہے، جسم کی حرکت کی سمت اور رفتار معلوم کرو (۱) دو سیکنڈ گذرنے کے بعد (۲) جب یہ عرشہ جہاز پر آکر ٹکرائے۔

(۱۰) ایک ٹیلے کی چوٹی پر جس کی بلندی ۴۰۰ فٹ ہے ایک توپ دھری ہے، اس سے ایک گولہ ۷۶۸ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، توپ میں سے گذرنے والے عمودی خط سے

اُس نقطہ کا افقی فاصلہ دریافت کرو جہاں گولہ زمین پر جاکر لگتا ہے۔

(۱۱) ایک عمودی برج کی چوٹی سے جس کا ارتفاع $\frac{13}{2}$ ج فٹ ہے ایک ذرہ پھینکا گیا ہے، اسکی ابتدائی رفتار کے اجزائے ترکیبی عمودی اور افقی سمتوں میں بالترتیب ۶ ج اور ۸ ج ہیں، اس کی مدت پرواز معلوم کرو اور پائین برج سے اُس نقطہ کا فاصلہ دریافت کرو جہاں یہ زمین پر آکر لگتا ہے۔

(۱۲) ایک بندوق سے گولی اس طرح چلائی گئی ہے کہ وہ گرجا سنٹراس برگ کے کنگرے کی چوٹی پر افقی سمت میں جاکر لگتی ہے، چوٹی کا ارتفاع ۱۴۱ میٹر ہے، اگر زاویہ رمی مم$^{-1}$ ۵ ہو تو ثابت کرو کہ رفتار رمی تقریباً ۲۶۸ میٹر فی سیکنڈ ہوگی۔

(۱۳) ایک ایسی گولی کی رفتار اور سمت رمی دریافت کرو جو ایک ۷۵ فٹ اونچی دیوار کی چوٹی پر سے عین افقی سمت میں گذر سکے، دیوار کا فاصلہ نقطہ رمی سے ۵۰ گز ہے۔

(۱۴) ایک ذرہ ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے زاویہ جب$^{-1}$ $\frac{4}{5}$ بناتی ہے، افقی سطح پر اس کا ٹپہ ۴ میل ہے، اس کی رفتار رمی معلوم کرو اور اسکے راستہ کے سب سے اونچے نقطہ پر جو اسکی

رفتار ہے اسکو بھی معلوم کرو

(۱۵) ایک ہی نقطہ سے دو گیند ایسی دو سمتوں میں پھینکے گئے ہیں جو افق سے °۶۰ اور °۳۰ کے زاویے بناتی ہیں، اگر وہ دونوں ایک ہی اونچائی تک پہنچیں تو انکی ابتدائی رفتاروں کی نسبت دریافت کرو اگر اُن دونوں کا افقی ٹپہ ایک ہی ہو تو یہ نسبت کیا ہو گی؟

(۱۶) ایک ذرہ کی رفتار جب یہ بڑی سے بڑی اونچائی پر ہو اُس رفتار کا $\sqrt{\frac{2}{5}}$ ہوتی ہے جب یہ بڑی سے بڑی اونچائی کے نصف پر ہو۔ ثابت کرو کہ زاویہ رمی °۶۰ ہے۔

(۱۷) زاویہ رمی دریافت کرو جبکہ ایک افقی سطح پر کا ٹپہ مرمی کے ارتفاع اعظم کا (۱) ۴ (۲) ۴ $\sqrt{3}$ گنا ہو۔

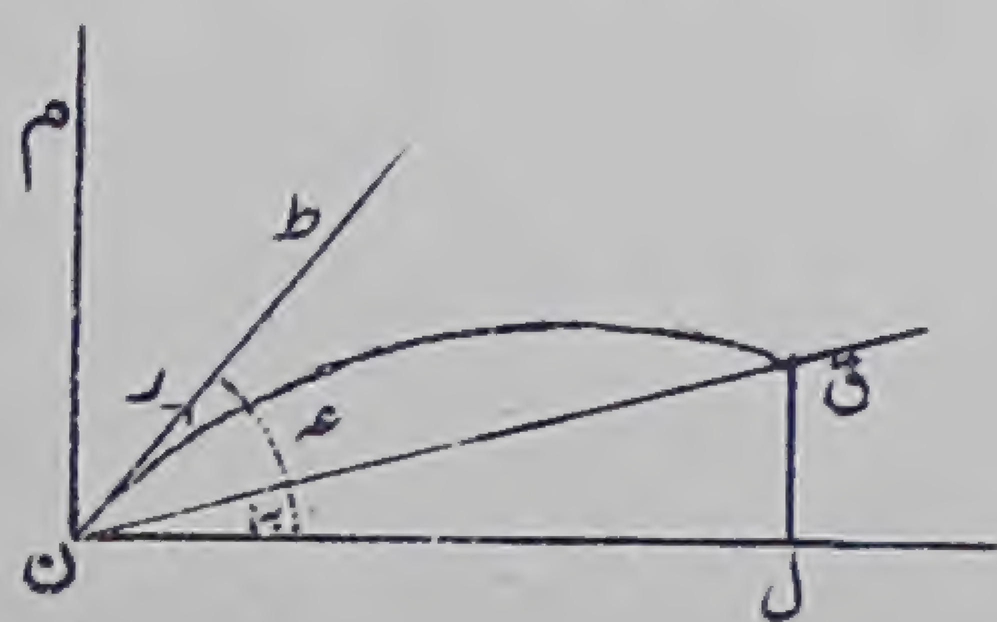
(۱۸) اگر ایک ذرہ ٹپہ کے مساوی فاصلہ بلا تکلف نیچے گرنے سے اسقدر رفتار حاصل کرلے جو ذرہ کی ابتدائی رفتار رمی کے مساوی ہو تو زاویہ رمی دریافت کرو۔

۱۰۹- ایک سطح مائل پر کا ٹپہ

ایک سطح مائل افق سے زاویہ ب بناتی ہے، اس کے ایک نقطے سے ایک ذرہ رفتار ر کے ساتھ ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو سطح مائل پر کے عماد اور خط میلان اعظم

میں سے گذرتی ہے، اگر ذرہ کا زاویہ رمی عہ ہو تو سطح مائل پر کا ٹپہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح مائل پر کا ٹپہ ن ق ہے، سمت رمی ن ط ہے اور ق ل، ن میں سے گذرنے والی افقی سطح پر عمود ہے۔



رفتار کا ابتدائی جزء ترکیبی ن ق کی عمودی سمت میں ر جب (عہ ـ بہ) ہے اور اس سمت میں اسراع ـ ج جم بہ ہے

فرض کرو کہ ذرہ کو ن سے ق تک جانے میں وقت ت لگتا ہے تب وقت ت میں فاصلہ طے کردہ ن ق کی عمودی سمت میں صفر ہے۔

$$\text{اسلئے } 0 = \text{ر جب (عہ ـ بہ)} \times \text{ت} - \frac{1}{2}\,\text{ج جم بہ} \times \text{ت}^{2}$$

$$\text{اسلئے ت} = \frac{2\text{ر}}{\text{ج}}\ \frac{\text{جب (عہ ـ بہ)}}{\text{جم بہ}}$$

اس اثنا میں افقی رفتار ر جم عہ مستقل رہتی ہے،

اسلئے ن ل = ر جم عہ × ت پس ٹپہ

$$\text{ن ق} = \frac{\text{ن ل}}{\text{جم بہ}} = \frac{\text{ر جم عہ}}{\text{جم بہ}} \times \text{ت} = \frac{\text{۲ ر}^{۲}}{\text{ج}} \; \frac{\text{جم عہ جب (عہ - بہ)}}{\text{جم}^{۲}\text{ بہ}}$$

(۱۱۰) بڑے سے بڑا ٹپہ۔ وہ سمت رمی دریافت کرو جس سے سطح مائل پر بڑے سے بڑا ٹپہ حاصل ہو اور ثابت کرو کہ کسی ایک مفروضہ ٹپہ کے لئے مرمی کو پھینکنے کی دو سمتیں ہیں جو بڑے سے بڑے ٹپے والی سمت سے مساوی زاوئے بناتی ہیں۔

گذشتہ دفعہ سے ٹپہ

$$= \frac{\text{۲ ر}^{۲}}{\text{ج}} \; \frac{\text{جم عہ جب (عہ - بہ)}}{\text{جم}^{۲}\text{ بہ}} = \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ج جم}^{۲}\text{ بہ}} \left\{ \text{جب (۲ عہ - بہ) - جب بہ} \right\} \quad (۱)$$

اب ر اور بہ معلوم ہیں اسلئے ٹپہ بڑے سے بڑا اسوقت ہوگا جبکہ

جب (۲ عہ - بہ) بڑی سے بڑی ہو یا جبکہ $\text{۲ عہ - بہ} = \frac{\pi}{۲}$

اس صورت میں $\text{عہ - بہ} = \frac{\pi}{۲} - \text{عہ}$

یعنی زاوئے ط ن ق اور ط ن م مساوی ہیں۔

اسلئے بڑے سے بڑے ٹپہ والی سمت، عمودی سمت اور سطح مائل کے درمیانی زاویہ کی تنصیف کرتی ہے۔

$$\text{نیز بڑے سے بڑا ٹپہ} = \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ج جم}^{۲}\text{ بہ}} \left(\text{۱ - جب بہ} \right)$$

$$= \frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ج (۱ + جب بہ)}}$$

نیز (۱) کی رو سے ٹپہ بزاویہ ارتفاع عہ۱ وہی ہوگا جو ٹپہ بزاویہ ارتفاع عہ ہے

اگر جب (۲عہ۱ − بہ) = جب (۲عہ − بہ)

یعنی اگر ۲عہ۱ − بہ = π − (۲عہ − بہ)

یعنی اگر عہ۱ = π/۲ + بہ − عہ

یعنی اگر عہ۱ − (π/۴ + بہ/۲) = (π/۴ + بہ/۲) − عہ

لیکن زاویہ ارتفاع π/۴ + بہ/۲ سے بڑے سے بڑا ٹپہ حاصل ہوتا ہے

اس لئے سطح مائل پر کوئی **مفروضہ** ٹپہ حاصل کرنے کے لئے مرمی کو پھینکنے کی دو سمتیں ہیں اور یہ سمتیں سطح پر بڑے سے بڑا ٹپہ رکھنے والی سمت سے مساوی زاویے بناتی ہیں۔

۱۱۱۔ مثال (۱) ایک سطح مائل کے پائین سے جسکا چڑھاؤ ۲۵ میں ۷ ہے ایک گولی ۶۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے (۱) سطح مائل کے اوپر کی طرف (۲) سطح کے نیچے کی طرف، ایسی سمت میں پھینکی گئی ہے جو افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، ہر صورت میں سطح پر کا ٹپہ دریافت کرو۔

فرض کرو کہ سطح کا میلان بہ ہے یعنی

جب بہ = ۷/۲۵ اور جتم بہ = ۲۴/۲۵

(۱) دفعہ ۱۰۹ کی رو سے، ٹپہ صورت اول میں

$$=۲\,\frac{۶۰۰^{۲}}{۳۲}\;\frac{\text{جم}\,۳۰^{\circ}\,\text{جب}\,(۳۰^{\circ}-\text{بہ})}{\text{جم}^{۲}\,\text{بہ}}=\frac{۶۰۰^{۲}}{۱۶}\times\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۲}\left(\frac{۲۴}{۲۵}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}-\frac{۱}{۲}\times\frac{۷}{۲۵}\right)}{\frac{۲۴^{۲}}{۲۵^{۲}}}$$

$$=\frac{۳۶۰۰۰۰}{۱۶}\times\frac{۲۵\sqrt{۳}\,(۲۴-۷\sqrt{۳})}{۵۷۶\times۴}=\frac{۷۵۰۰۰۰}{۱۰۲۴}\,(۸\sqrt{۳}-۷)$$

= ۵۰۲۲ فٹ تقریباً

(۲) سطح مائل کی عمودی سمت میں ابتدائی رفتار ر جب (۳۰° + بہ) اور اسراع − ج جم بہ ہے، اسلئے مدت پرواز ت،

$$۲\,\frac{\text{ر}}{\text{ج}}\;\frac{\text{جب}\,(۳۰^{\circ}+\text{بہ})}{\text{جم}\,\text{بہ}}$$

ہے، اسلئے اگر ٹپہ ٹ ہو تو دفعہ ۱۰۹ کے موافق

$$\text{ٹ جم بہ}=\text{ر جم}\,۳۰^{\circ}\times\text{ت}$$

$$\therefore\ \text{ٹ}=۲\,\frac{\text{ر}^{۲}}{\text{ج}}\;\frac{\text{جم}\,۳۰^{\circ}\,\text{جب}\,(۳۰^{\circ}+\text{بہ})}{\text{جم}^{۲}\,\text{بہ}}$$

$$=\frac{۷۵۰۰۰۰}{۱۰۲۴}\,(۸\sqrt{۳}+۷)$$ جیسا (۱) میں

= ۱۵۲۷۵ فٹ تقریباً

انتباہ اگر ضابطہ دفعہ ۱۰۹ میں بہ کی جگہ (− بہ) رکھ دیا جائے تو سطح مائل کے نیچے کی طرف کا ٹپہ حاصل ہوگا اور وہ یہہ ہے

$$\frac{۲ر^۲}{ج} \times \frac{\text{جم عہ جب (عہ + بہ)}}{\text{جم}^۲ \text{ بہ}}$$

مثال (۲) سابق مثال میں بڑے سے بڑا ٹپہ دریافت کرو

زاویۂ رمی عہ لازماً $= \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۲} + \text{بہ}\right) = \left(\frac{\pi}{۴} + \frac{\text{بہ}}{۲}\right)$

اس صورت میں ٹپہ $= \frac{ر^۲}{\text{ج جم}^۲ \text{بہ}}$ (۱ - جب بہ)

$$= \frac{ر^۲}{ج} \cdot \frac{۱}{\text{۱ + جب بہ}} = \frac{۲۶۰۰}{۳۲} \cdot \frac{۱}{۱ + \frac{۷}{۲۵}}$$

$$= \frac{۲۵ \times ۳۶۰۰۰۰}{۳۲ \times ۳۲} = ۸،۸۹ \text{ فٹ تقریباً}$$

اسی طرح سے سطح مائل کے نیچے کی طرف بڑے سے بڑا ٹپہ $\frac{۲۶۰۰}{۳۲} \times \frac{۱}{۱ - \frac{۷}{۲۵}}$ یعنی ۱۵۶۲۵ فٹ ہوگا

مثال (۳) ایک سطح مائل کے پائین سے جو افق کے ساتھ زاویہ بہ بناتی ہے ایک ذرہ ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جس کا میلان افق سے عہ ہے، ثابت کرو کہ اگر جم بہ = ۲ مس (عہ - بہ) تو ذرہ سطح مائل کو زاویہ قائمہ پر آکر لگیگا۔

فرض کرو۔ کہ رفتار رمی ر ہے۔ اسلئے سطح مائل کے

متوازی ابتدائی رفتار کا جزو تحلیلی ر جم (عہ - بہ) ہے۔ اور سطح کی عمودی سمت میں رفتار کا جزو تحلیلی ر جب (عہ - بہ) ہے۔

ان دو سمتوں میں اسراع - ج جب بہ اور - ج جم بہ ہونگے تب دفعہ ۱۰۹ کے مطابق ذرہ کو جو وقت ت سطح سے دوبارہ ملنے میں لگتا ہے وہ $\frac{\text{۲ ر جب (عہ - بہ)}}{\text{ج جم بہ}}$ ہے۔

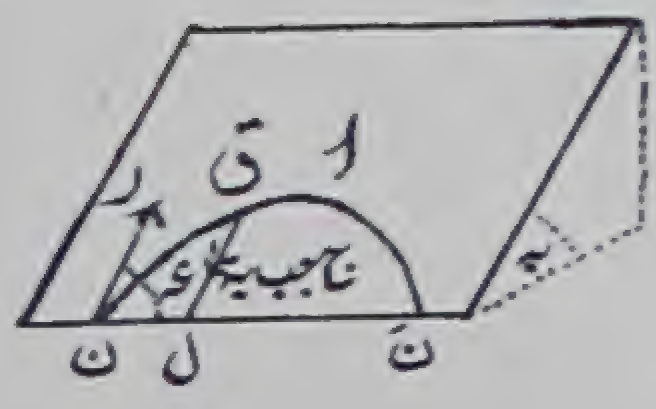
اگر ذرہ کی سمتِ حرکت اس آن میں جب یہ سطح پر آکر ٹکرائے سطح پر عمود وار ہو۔ تو اُسکی رفتار کا جو جزو تحلیلی اُس آن میں سطح کے متوازی ہوگا وہ صفر ہوگا۔

اس لئے ر جم (عہ - بہ) - ج جب بہ × ت = ۰

$$\therefore \frac{\text{ر جم (عہ - بہ)}}{\text{ج جب بہ}} = \text{ت} = \frac{\text{۲ ر جب (عہ - بہ)}}{\text{ج جم بہ}}$$

$$\therefore \text{مم بہ} = \text{۲ مس (عہ - بہ)}$$

۱۱۲ — ایک سطح مائل پر حرکت — ایک ذرہ ایک چکنی سطح مائل پر حرکت کرتا ہے۔ جو افق سے زاویہ بہ بناتی ہے۔ اگر ذرہ سطح پر کے ایک نقطہ سے رفتار ر کے ساتھ ایسی سمت میں پھینکا گیا ہو جو سطح مائل اور افقی سطح کے خط تقاطع سے زاویہ عہ بنائے۔ تو ذرہ کی حرکت دریافت کرو۔



قوت جاذبۂ ارض کی وجہ سے جو اسراع پیدا ہوتا ہے۔
اسکو دو اجزائے ترکیبی میں تحلیل کرو، ایک تو ج جب ہ
جو خط میلان اعظم کے متوازی ہے اور دوسرا ج جم ہ
جو سطح مائل پر عمود وار ہے۔ یہ دوسرا اسراع سطح کے
تعامل کی وجہ سے بے اثر یا ضائع ہو جاتا ہے ما
اسلئے ذرہ سطح مائل پر صرف اسراع ج جب ہ سے
حرکت کرتا ہے اور یہ اسراع سطح کے خط میلان اعظم
کے متوازی ہے۔
پس اس صورت میں حرکت کی تحقیق اُسی طرح سے
ہو سکتی ہے جیسے دفعات ۱۰۱ تا ۱۰۷ میں ہوئی، فرق
صرف اتنا ہے کہ ہمیں اسراع "ج" کو "ج جب ہ"
میں بدل دینا چاہیئے۔ اور "عمودی فاصلوں" کی بجائے
اُن فاصلوں سے مراد لینی چاہیئے۔ "جو سطح مائل پر
خط میلان اعظم کے متوازی ناپے گئے ہوں"

امثلہ نمبری (۱۸)

(۱) ایک سطح مائل افق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے،

اس کے پائین سے ایک ذرہ سیکنڈ میں ۶۰۰ فٹ کی ابتدائی رفتار سے ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے۔ جو افق سے زاویہ ۶۰° کا بناتی ہے، سطح مائل پر کا ٹپہ اور مدت پرواز دریافت کرو۔

(۲) ایک سطح کے پائین سے جس کا میلان ۳۰° ہے ایک ذرہ رفتار ر کے ساتھ ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے ۷۵° کا زاویہ بناتی ہے، معلوم کرو کہ ذرہ سطح کو کہاں جاکر لگیگا، سطح مائل پر ذرہ کا بڑے سے بڑا ٹپہ دریافت کرو۔

(۳) ایک ذرہ ۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایک ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے، ایک ایسی سطح مائل پر اس کا ٹپہ اور مدت پرواز دریافت کرو جو اُفق سے ۳۰° کا زاویہ بناتی ہے، ساتھ ہی اُس کا بڑے سے بڑا ٹپہ سطح مائل پر دریافت کرو

(۴) ایک ذرہ ۱۲۸۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہے، ایک ایسی سطح مائل پر جس کا زاویۂ میلان افق کے ساتھ جب$^{-1}$ $\frac{۳}{۵}$ ہے اس کا ٹپہ دریافت کرو جب یہ بالترتیب سطح کے (۱) اوپر کی طرف (۲) نیچے کی طرف، پھینکا گیا ہو۔

(۵) ایک بندوق کی گولی کی رفتار رمی ۸۰۰ فٹ فی ثانیہ ہے، ذیل کی مائل سطحوں میں سے ہر ایک پر اسکا بڑے سے بڑا ٹپہ اور مدت پرواز دریافت کرو۔ سطحوں کے زوایائے میلان اُفق کے ساتھ (۱) ۴۵° (۲) ۶۰° (۳) جب$^{-1}$ $\frac{۱}{۲۰}$ (۴) جب$^{-1}$ $\frac{۵}{۱۳}$ ہیں

(۶) ایک ذرہ خاص رفتار کے ساتھ ایک سطح مستوی پر پھینکا گیا ہے، اس کا بڑے سے بڑا ٹپہ اس سطح پر ۵۰۰ گز ہے، اس کا بڑے سے بڑا ٹپہ ایک ایسی سطح پر دریافت کرو۔ جس کا میلان اُفق سے ۴۵° ہو۔ ساتھ ہی جب ذرہ سطح مائل کے نیچے کی طرف پھینکا گیا ہو اُس صورت میں اُس کا بڑے سے بڑا ٹپہ دریافت کرو۔

(۷) ایک معلومہ رفتارِ رمی سے سطح مستوی پر ایک مرمی کا بڑے سے بڑا ٹپہ ۱۰۰۰ میٹر ہے، ثابت کرو کہ ایک ایسی سطح مائل پر جس کا میلان اُفق سے ۳۰° ہے مرمی کے بڑے سے بڑے ٹپے سطح کے اوپر کی طرف اور نیچے کی طرف بالترتیب ۶۶۶$\frac{۲}{۳}$ اور ۲۰۰۰ میٹر ہیں۔

(۸) ایک سطح افق سے زاویہ (۱) ۳۰° (۲) ۶۰° بناتی ہے، اُس پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ ۲۵ میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے سطح کی عمودی سمت میں پھینکا

گیا ہے، دونوں صورتوں میں سطح پر کا ٹپہ دریافت کرو۔

۱۱۳۔ ایک ذرہ ہوا کے اندر رفتار معلومہ کے ساتھ ایک مفروضہ سمت میں پھینکا گیا ہے، ثابت کرو کہ اس کا طریق قطع مکافی (شلجمی) ہے۔

دفعہ ۱۰۱ کے موافق فرض کرو کہ رفتار رمی ر ہے، زاویہ رمی عہ، افقی ٹپہ ن نَ اور طریق کا سب سے اونچا نقطہ ا ہے، اور ا م، ن نَ پر عمود ہے۔

تب دفعہ ۱۰۴ کی رُو سے

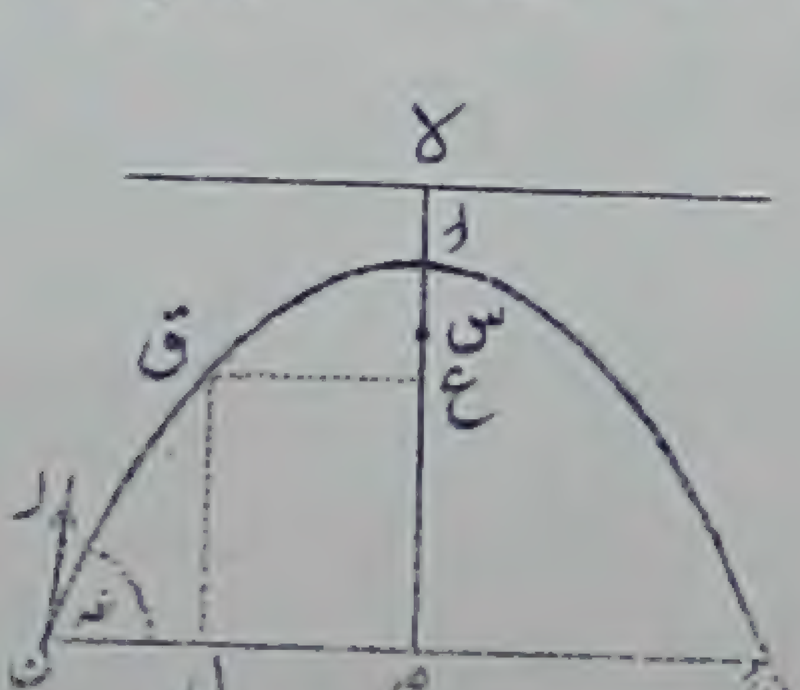
$$ا م = \frac{ر^2 جب^2 عہ}{2 ج} \quad \ldots\ldots (1)$$

نیز ن م = اُس اُفقی فاصلہ کے جو وقت $\frac{ر جب عہ}{ج}$ میں طے ہوا

$$= \frac{ر^2 جب عہ جم عہ}{ج}$$

فرض کرو کہ ذرہ کے طریق پہ کوئی نقطہ ق ہے، اور ا م، ن نَ پر ق ع اور ق ل بالترتیب عمود ہیں۔

فرض کرو کہ ن سے ق تک کی پرواز میں وقت ت لگتا ہے۔



تب ق ل = اُس عمودی فاصلہ کے جو وقت ت میں طے ہوا

$$= \text{ر جب عہ} \times \text{ت} - \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2 \quad \ldots\ldots(\text{۳})$$

اور

$$\text{ن ل} = \text{ر جم عہ} \times \text{ت} \quad \ldots\ldots\ldots(\text{۴})$$

اسلئے (۱) اور (۳) سے

$$\text{ا ع} = \text{ا م} - \text{ع م} = \text{ا م} - \text{ق ل}$$

$$= \frac{\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}{\text{۲ ج}} - \left(\text{ر جب عہ} \times \text{ت} - \frac{1}{2}\,\text{ج ت}^2\right)$$

$$= \frac{\text{ج}}{\text{۲}}\left(\frac{\text{ر جب عہ}}{\text{ج}} - \text{ت}\right)^2$$

ساتھ ہی (۲) اور (۴) سے

$$\text{ق ع} = \text{ن م} - \text{ن ل} = \frac{\text{ر}^2\,\text{جب عہ جم عہ}}{\text{ج}} - \text{ر جم عہ} \times \text{ت}$$

$$= \text{ر جم عہ}\left(\frac{\text{ر جب عہ}}{\text{ج}} - \text{ت}\right)$$

$$\therefore \text{ق ع}^2 = \text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}\left(\frac{\text{ر جب عہ}}{\text{ج}} - \text{ت}\right)^2 = \text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} \times \frac{\text{۲ ا ع}}{\text{ج}}$$

$$= \frac{\text{۲ ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{ج}} \times \text{ا ع}$$

اس کو شاقولی سمت میں $\frac{\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}{\text{۲ ج}}$ کے مساوی ناپو

$$\therefore \text{ق ع}^2 = \text{۴ ا س} \times \text{ا ع}$$

لیکن یہ اُس منحنی کی بُنیادی خاصیت ہے جسکو شلجمی یا قطع مکافی کہتے ہیں۔
اسلئے ق ایک ایسے قطع مکافی پر واقع ہے جسکا محور عمودی ہے، جس کا راس ا ہے اور جس کا وتر خاص

$$= ۴ \text{ اس } = \frac{۲ \text{ر}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ عہ}}{\text{ج}}$$

نیتجہ صریح (۱) اس سے معلوم ہوگا کہ قطع مکافی کا وتر خاص یا دوسرے الفاظ میں اس کا ناپ ابتدائی رفتار کے صرف افقی جزءِ تحلیلی پر منحصر ہے اور عمودی جزء پر منحصر نہیں ہے۔
نیتجہ صریح (۲) ماسکہ س کا ارتفاع ن میں سے گزرنے والے اُفقی خط سے = س م = ام - اس

$$= \frac{\text{ر}^۲ \text{جب}^۲ \text{عہ}}{۲ \text{ ج}} - \frac{\text{ر}^۲ \text{ جم}^۲ \text{ عہ}}{۲ \text{ ج}} = \frac{\text{ر}^۲}{۲ \text{ ج}} \text{ جم } ۲ \text{ عہ}$$

اسلئے اگر عہ، °۴۵ سے کم ہو تو یہ فاصلہ منفی ہوگا اور طریق کا ماسکہ، نقطہ رمی میں سے گذرنے والے افقی خط سے نیچے واقع ہوگا۔
۱۱۴- ثابت کرو کہ طریق کے کسی نقطہ پر ذرہ کی رفتار مقدار کے لحاظ سے اُس رفتار کے مساوی ہوتی ہے جو وہ مرتب سے نقطہ مذکور تک شاقولی سمت میں

بلا تکلف گرنے سے حاصل کرسکتا ہے۔

دفعہ ۱۱۳ کی شکل میں م ا کو لا تک اتنا خارج کرو کہ ا لا، اس کے مساوی ہو، لا ک کو افقی سمت میں کھینچو، تب لا ک مرتب ہوگا۔

اگر ق پر کی رفتار ںَ ہو تو دفعہ ۱۰۲ کی رو سے

$$\text{ںَ}^2 = (\text{ں جب عہ} - \text{ج ت})^2 + (\text{ں جم عہ})^2$$

$$= \text{ں}^2 - ۲\,\text{ں ج جب عہ} \times \text{ت} + \text{ج}^2\,\text{ت}^2$$

$$= ۲\,\text{ج}\left[\frac{\text{ں}^2}{۲\,\text{ج}} - \left(\text{ں جب عہ} \times \text{ت} - \frac{۱}{۲}\,\text{ج ت}^2\right)\right]$$

لیکن $\text{م لا} = \text{م ا} + \text{ا لا} = \frac{\text{ں}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ}}{۲\,\text{ج}} + \frac{\text{ں}^2\,\text{جم عہ}}{۲\,\text{ج}} = \frac{\text{ں}^2}{۲\,\text{ج}}$

اور $\text{م ع} = \text{ق ل} = \text{ں جب عہ} \times \text{ت} - \frac{۱}{۲}\,\text{ج ت}^2$

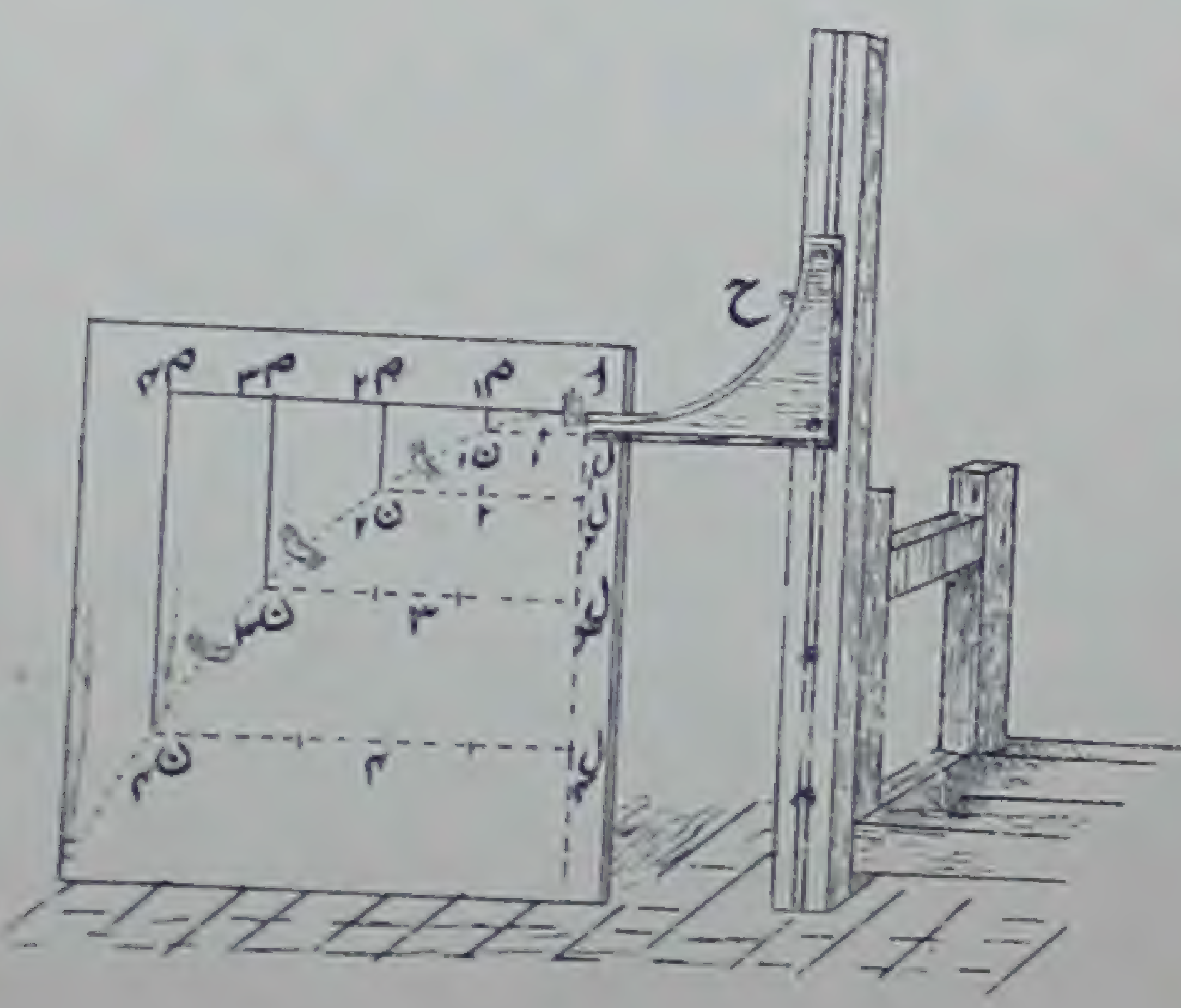
$$\therefore\ \text{ںَ}^2 = ۲\,\text{ج}\,[\text{م لا} - \text{م ع}] = ۲\,\text{ج} \times \text{ع لا}$$

اسلئے ںَ اس رفتار کے مساوی ہے جو ذرہ مرتب سے نقطہ ق تک شاقولی سمت میں بلا تکلف گرنے سے حاصل کرتا ہے۔

۱۱۵- اس مسئلہ کا تجربی ثبوت کہ ایک مرمی کا طریق قطع مکافی ہوتا ہے

فرض کرو کہ ایک منحنی تختہ ا ح پر ایک نالی یا جھری بنادی گئی ہے جس میں سے ایک چھوٹی گولی نیچے کی طرف لڑھک سکتی ہے، اس کو ایک عمودی تختہ

ساتھ آگے کی طرف مضبوطی سے جڑدو، نالی پر ایک نقطہ ح مقرر کرو اور فرض کرو کہ گولی ہمیشہ اُس نقطہ سے لڑھکنا شروع کرتی ہے اور نقطہ ا تک لڑھکنے کے بعد تختہ سیاہ کے عین سامنے ہوا کے اندر بلا تکلف ایک طریق مرتسم کرتی ہے اس تختہ سیاہ پر کاغذ یا مقوے کے کئی چھوٹے حلقے ایسے مقامات پر لگاؤ کہ گولی عین بیچ میں ان کے گذر سکے، حلقوں کے مقامات کو آزمائش سے معلوم کرو، مثلاً اگر گولی کو نالی کے ایک ہی مقام ح سے چھوڑ کر دو تین دفعہ تجربہ کیا جائے تو پہلے حلقے کا مقام معلوم ہو سکیگا۔ اسی طرح سے باقی حلقوں کے مقام بھی ایسے تجربوں سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



بڑی احتیاط سے گولی کو ہمیشہ اسی نقطہ ح سے چھوڑنا چاہیئے پھر ایک منحنی ا ن، ن۲ ن۳ ..... ایسا کھینچو جو ان حلقوں کے مرکزوں میں سے گذرے۔ اگر بہت سے حلقے ٹھیک طور پر اپنے اپنے مقامات پر لگائے گئے ہوں تو اس منحنی کا صرف ہاتھ سے کھینچ لینا آسان ہوگا۔

عمودی خط ن۱ م۱، ن۲ م۲، ن۳ م۳ ..... کھینچو جو ا میں سے گزرنے والے افقی خط کو م۱، م۲، م۳ .... پر ملیں۔

فاصلے ا م۱، ا م۲ ..... اور ن۱ م۱، ن۲ م۲ .... ناپو تب ا م۱، ا م۲، ا م۳ ..... کے مربعے لینے اور انکو بالترتیب ن۱ م۱، ن۲ م۲ ..... پر تقسیم کرنے سے معلوم ہوگا کہ ہر صورت میں قریب قریب نتیجہ وہی ہے اسلئے معلوم ہوا کہ منحنی کے کسی نقطہ ن کے لئے $\frac{ا م^2}{ن م}$ مستقل ہے یعنی $\frac{ن ل^2}{ا ل}$ مستقل ہے۔

اسلئے ن ل۲ ایسے بدلتا ہے جیسے ا ل

لیکن یہ قطع مکافی کی بنیادی خاصیت ہے

اسلئے منحنی مذکور قطع مکافی ہے

اگر ہم گولی کو نالی کے کسی اور نقطہ ح سے چھوڑیں تو بھی یہی نتیجہ حاصل ہوگا۔ لیکن ابتدائی نقطہ ح کا مقام بدلنے سے شلجمی کی شکل میں تغیر واقع ہوگا۔

اگر منحنی تختہ کو اس طرح ترتیب دیا جائے کہ نالی کے

نقطہ ا پر گولی کی سمت متوازی الافق نہ ہو۔ تو بھی اسی طرح سے ہم ثابت کر سکتے ہیں کہ خواہ گولی کسی سمت میں کسی رفتار سے پھینکی گئی ہو اُس کا طریق ہمیشہ قطع مکافی یا شلجمی ہو گا۔

امثلہ نمبری ۱۹

(۱) چاند پر کوئی کرہ ہوائی معلوم نہیں ہوتا اور چاند پر کی قوت جاذبہ مقدار میں جاذبۂ زمین کی نسبت بقدر $\frac{۵}{۶}$ کے کم ہے، اگر چاند پر کے ایک قلعہ کی توپ سے ۱۶۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے گولہ نکلے۔ تو معلوم کرو کہ ملک کا کتنا حصہ اس توپ کی زد میں ہو گا۔

(۲) ایک ٹینس کا گیند ۸ فٹ کی بلندی سے پھینکا گیا ہے، یہ جال کو ایک ایسے نقطے پر مس کرتا ہے جس کی بلندی ۳ فٹ ۳ انچ ہے اور دوسری طرف جال سے ۲۱ فٹ کے فاصلہ پر جا کے پڑتا ہے ہجال کے پائین سے گیند پھینکنے والے کا افقی فاصلہ ۳۹ فٹ ہے، ثابت کرو کہ گیند کی افقی رفتار ۱۷۱ فٹ فی ثانیہ ہے اور زاویہ رمی دریافت کرو۔

(۳) ایک سطح مائل افق سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے اور اُس کا طول ۶ فٹ ہے، ایک ذرہ سطح پر سیدھا

اوپر کی طرف ۱۶ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے پھینکا گیا ہے، سطح کو چھوڑنے کے بعد ذرہ کا بڑے سے بڑا ارتفاع معلوم کرو اور سطح کے پائین سے گذرنے والی افقی سطح پر اس کا ٹپہ دریافت کرو۔

(۴) ایک گوپن سے ایک پتھر ایک افقی دائرہ میں جس کا نصف قطر ۳ فٹ ہے اور جس کا ارتفاع زمین سے ۶ فٹ ہے یکساں رفتار سے گھما کر پھینکا گیا ہے، اگر گوپن دو سیکنڈ میں ۲۱ گردشیں کرے، تو گوپن سے چھٹنے کے بعد پتھر کا ٹپہ سطح زمین پر دریافت کرو۔

(۵) دو توپوں کے منہ ایک دوسرے کے عین سامنے ہیں اور اُن کا درمیانی فاصلہ ۱۰۰ فٹ ہے، ایک کی سمت کا زاویہ ارتفاع °۳۰ ہے اور دوسری کا زاویہ انخفاض اتنا ہی ہے، اگر گولے توپوں سے بالترتیب ۱۱۰۰ اور ۹۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے نکلیں تو معلوم کرو کہ وہ کب اور کس جگہ ایکدوسرے سے ملینگے۔

(۶) ایک شے نقطہ رمی میں سے گذرنے والی سطح افقی میں واقع ہے، اگر زاویہ ارتفاع عہ کے ساتھ اس کا نشانہ کیا جائے تو مرمی ا فٹ کم رہ جاتا ہے اور اگر مرمی کا ارتفاع بہ ہو تو یہ ب فٹ آگے چلا جاتا ہے، ثابت کرو کہ اگر ہر صورت میں رفتار رمی ایک ہی ہو تو صحیح ارتفاع $\frac{1}{2}$ جب$^{-1}$ $\frac{\text{ا جب ۲ بہ + ب جب ۲ عہ}}{\text{ا + ب}}$ ہو گا۔

(۷) ایک پہاڑی افق سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے، اس پر کے ایک نقطہ سے ایک مرمی اوپر کی طرف اور دوسرا نیچے کی طرف اسی رفتار سے پھینکا گیا ہے اور زاویہ رمی ہر صورت میں °۴۵ ہے، ثابت کرو کہ ایک مرمی کا ٹپہ دوسرے کے ٹپہ کا $\frac{۳}{۴}$ ۳ ہے۔

(۸) ایک سطح مائل پر کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے جو افق سے °۶۰ کا زاویہ بناتی ہے، اگر سطح پر کا ٹپہ اُس فاصلہ کے مساوی ہو جو ایک دوسرا ذرہ محل سکون سے پہلے ذرہ کی مدت پرواز میں بلا تکلف گرنے سے طے کرے تو سطح کا میلان افق سے دریافت کرو۔

(۹) ایک سطح مائل پر کے ایک نقطہ سے دو جسم ایک ہی رفتار سے ایک ہی سطح عمودی میں پھینکے گئے ہیں اور انکی سمتیں ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں، ثابت کرو کہ اُن کے ٹپوں کا فرق مستقل ہے۔

(۱۰) ب فٹ بلند پہاڑی پر دشمن کے مقام کا زاویۂ ارتفاع بہ ہے، ثابت کرو کہ اس پر گولہ باری کرنے کیلئے مرمی کی ابتدائی رفتار $\sqrt{\text{ج ب (۱ + قم بہ)}}$ سے کم نہیں ہونی چاہیئے۔

(۱۱) ثابت کرو کہ نقطہ رمی میں سے گذرنے والی ایک سطح مائل پر کا بڑے سے بڑا ٹپہ اُس فاصلہ کے مساوی ہے

جو ذرہ اس پٹہ کی مدت پرواز میں بلا تکلف گرنے سے طے کرے گا۔

(۱۲) ایک ذرہ ابتدائی رفتار ر سے پھینکا گیا ہے، اور نقطہ رمی میں سے گذرنے والی ایک سطح مائل کو زاویہ قائمہ پر آکر لگتا ہے، اگر سطح کا میلان افق سے بہ ہو تو ثابت کرو کہ نقطہ رمی میں سے گزرنے والی افقی سطح پر اُس نقطہ کی بلندی جہاں ذرہ سطح مائل سے جاکے لگتا ہے، $\frac{\text{۲ر}^{۲}}{\text{ج}} \times \frac{\text{جب}^{۲}\,\text{بہ}}{\text{۱+۳جب}^{۲}\,\text{بہ}}$ ہے اور مدت پرواز $\frac{\text{۲ر}}{\text{ج}\sqrt{\text{۱+۳جب}^{۲}\,\text{بہ}}}$ ہے اور نقطہ رمی میں سے گذرنے والی افقی سطح پر ذرہ کا ٹپہ

$$\frac{\text{ر}^{۲}\,\text{جب ۲ بہ}}{\text{ج}} \times \frac{\text{۱+ جب}^{۲}\,\text{بہ}}{\text{۱+ ۳جب}^{۲}\,\text{بہ}}$$ ہے

(۱۳) ثابت کرو کہ ایک افقی سطح پر کی مدت پرواز میں جو ثانیوں کی تعداد ہے اسکے مربع کا چار گنا اُن فٹونکی تعداد کے مساوی ہے جو خط مرمی کے سب سے اونچے نقطے کی بلندی میں ہیں۔

(۱۴) ایک مرمی کی بڑی سے بڑی بلندی نقطہ رمی میں سے گزرنے والی افقی سطح سے ب ہے اور زاویہ رمی عہ ہے، اُن دو آنوں کا باہمی وقفہ دریافت

کرو۔ جن میں مرمی کی بلندی ب جب^{۲} عہ ہو

(۱۵) ایک بندوق چلانے کے وقت ایک جسم ایک غبارہ سے بلا تکلف گرنے کے لئے چھوڑا گیا ہے، معلوم کرو کہ بندوق کی سمت کیا ہو کہ گولی جسم سے ٹکرا ے۔ اگر غبارہ کی بلندی ۲۲۰ گز ہو اور نقطۂ رمی سے غبارہ کا ارتفاع ۳۰° ہو اور گولی کی رفتار رمی ۱۲۲۰ فٹ فی سیکنڈ ہو تو جہاں گولی اور جسم ٹکراتے ہیں اس نقطہ کو معلوم کرو (غبارہ ساکن ہے)۔

(۱۶) دو ذرے ایک ہی آن میں پھینکے گئے ہیں۔ ایک بزاویہ ارتفاع ۶۰° رفتار $\frac{۲ر}{\sqrt{۳}}$ کے ساتھ اور دوسرا ایک چکنی سطح مائل پر جو افق سے زاویہ ۳۰° کا بناتی ہے رفتار ر کے ساتھ، ثابت کرو کہ آن مذکور سے $\frac{۲ر}{۳ج}$ ثانیوں کے بعد ذرے بلحاظ ایک دوسرے کے ساکن ہوں گے۔

(۱۷) ایک گاڑی کے اگلے اور پچھلے پہیوں کے نصف قطر ا اور ب ہیں، اور ان کے دھروں کا درمیانی فاصلہ د ہے، مٹی کا ایک ذرہ پچھلے پہیے کے سب سے اونچے نقطہ سے چھٹ کر اگلے پہیے کے سب سے اونچے نقطہ پر آکر پڑتا ہے، ثابت کرو کہ گاڑی کی رفتار

$$\sqrt{\frac{(د+ب-ا)(د+ا-ب)}{۴(ب-ا)}\,ج} \quad ہے$$

(۱۸) اگر ۱۰ پونڈ بارود ۶۸ پونڈ کے ایک گولے میں ۱۶۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار پیدا کر سکے، اور گولے کی توانائی بالقوہ بارود کی مقدار کے متناسب ہو۔ تو معلوم کرو کہ اسی گولے کو بارتفاع ۱۵°، ۳۰۰۰ گز تک پھینکنے میں کتنی بارود درکار ہوگی؟

(۱۹) ۲ پونڈ کی کمیت کا ایک جسم ۲۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے ایسی سمت میں پھینکا گیا ہے، جو اُفق سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے ۳ پونڈ کی کمیت کا ایک اور جسم اُسی وقت اُسی نقطہ سے ۴۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے بارتفاع ۳۰° پھینکا گیا ہے، جس بلندی تک اُن کا مشترک مرکز ثقل پہنچ سکتا ہے، اُس کو دو مرتبہ کے اعشاریہ تک دریافت کرو اور جہاں یہ مرکزِ ثقل نقطہ رمی میں سے گزرنے والی افقی سطح سے ملتا ہے، اُس نقطہ کا فاصلہ معلوم کرو۔

(۲۰) ایک ریل گاڑی ۴۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے جارہی ہے، اُس میں کا ایک مسافر ایک گیند کو عمودی سمت میں ۱۲ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے پھینکتا ہے، گیند کے طریق کا وتر خاص معلوم کرو۔ اگر گیند اسی رفتار سے ۶۰° کے زاویہ پر (۱) گاڑی کی حرکت کی سمت میں (۲) متقابل سمت میں پھینکا جائے تو

ہر صورت میں وتر خاص دریافت کرو۔

(۲۱) جو وقت ایک ذرہ کو خط مرمی کے وتر خاص کے کسی ایک سرے تک پہونچنے میں لگتا ہے اُسے دریافت کرو۔

(۲۲) ایک ذرہ اسطرح پھینکا گیا ہے کہ وہ ایک پتلی چھوٹی مستقیم نلی کے ایک سرے سے داخل ہوکر دوسرے سرے سے نکل جاتا ہے، نلی کا زاویۂ میلان ۴۵° ہے، ثابت کرو کہ نلی میں داخل ہونے سے پہلے ذرہ کا جو طریق ہے اُس کے وتر خاص اور اُس طریق کے وتر خاص کا باہمی فرق جو نلی سے خارج ہونے کے بعد پیدا ہوتا ہے، نلی کے طول کا √۲ گنا ہے۔

(۲۳) ایک ذرہ ۱۰۰ فٹ بلند برج کی چوٹی سے اُفقی سمت میں پھینکا گیا ہے، اور اُس کے طریق کا ماسکہ اُس اُفقی سطح میں واقع ہے جو برج کے پائین میں سے گذرتی ہے، رفتار رمی دریافت کرو۔

(۲۴) ایک ذرہ ابتدائی رفتار ۲ √(ا ج) سے پھینکا گیا ہے، اور وہ یکساں بلندی کی دو دیواروں پر سے عین گذر جاتا ہے، ہر ایک دیوار کی بلندی ا ہے اور ان کا باہمی فاصلہ ۲ ا ہے، ثابت کرو کہ طریق کا وتر خاص ۲ ا ہے اور دیواروں پر سے گذرنیکا وقت ۲ √(ا/ج) ہے۔

(۲۵) ثابت کرو کہ ان سب خطوط رمی کے ماسکوں کا طریق (مقام) جو دو نقاط معلومہ میں سے گذرتے ہیں قطع زائد (ہذلولی) ہے۔

(۲۶) اگر ایک مرمی کو اپنے طریق کے نقطہ ن پر پہنچنے میں وقت ت صرف ہو، اور ن سے اُس افقی سطح تک جانے میں جو نقطہ رمی میں سے گزرتی ہے وقت تَ لگے تو ثابت کرو کہ نقطہ ن کی بلندی افقی سطح سے ½ ج ت تَ ہے۔

(۲۷) اگر شلجمی طریق کے کسی نقطہ پر ایک ذرہ کی رفتار ر ہو اور اُس کی سمتِ حرکت کا میلان افق سے ط ہو تو ثابت کرو کہ وقت ر / (ج جب ط) کے بعد ذرہ کی سمتِ حرکت پہلی سمت سے زاویہ قائمہ بنائے گی۔

باب ہشتم

لچکدار جسموں کا تصادم

(۱۱٦) اگر ایک کانچ کی گولی ایک شخص کے ہاتھ سے سنگ مرمر کے فرش پر گرے تو وہ اچھی خاصی دور یعنی تقریباً اس کے ہاتھ تک اچھلتی ہے۔ اگر وہی گولی لکڑی کے فرش پر گرے تو بہت کم دور اچھلتی ہے۔

اگر ہم دو گولے لیں ایک کانچ کا اور دوسرا ہاتھی دانت کا بلیرڈ کھیلنے کا گولہ اور دونو گولوں کو ایک ہی بلندی سے فرش پر گرائیں تو دونو اچھل کر مختلف بلندیوں تک جائیں گے۔

اگر ہم سیسے کی گولی اسی بلندی سے اسی فرش پر گرائیں تو وہ کانچ اور ہاتھی دانت کے گولوں سے بہت کم اچھلے گی

جس وقت یہ جسم فرش پر پہنچتے ہیں اس وقت ان

سب کی رفتاریں تو ایک ہی ہوتی ہیں۔ لیکن چونکہ وہ اچھل کر مختلف بلندیوں تک جاتے ہیں اس لئے جس وقت یہ جسم فرش سے ٹکراکر اوپر کو جانا شروع کرتے ہیں اس وقت ان کی رفتاریں مختلف ہوں گی۔

جسموں کی یہ خاصیت جس کی وجہ سے فرش سے ٹکرانے کے بعد ان کی رفتاریں مختلف ہوتی ہیں ان کی **لچک** کہلاتی ہے۔

اس باب میں ہم لچکدار جسموں کے تصادم کی آسان صورتوں پر غور کرینگے یعنی ہم صرف ایسی صورتوں پر غور کرینگے جہاں ذرے ذروں سے یا سطحوں سے ٹکرائیں یا چکنے یکذات کرے چکنی سطحوں یا چکنے کروں سے ٹکرائیں۔

۱۱۷۔ **تعریف**۔ دو جسموں کی ٹکر یا تصادم اس صورت میں سیدھی ٹکر یا تصادمِ راست کہلاتی ہے جب ان کی حرکت کی سمت ان کے نقطہ تماس پر کے عماد مشترک کی سیدھ میں ہو

ان کی ٹکر کو ٹیڑھی ٹکر یا تصادمِ کج اس صورت میں کہتے ہیں جب ان میں سے ایک کی یا دونوں کی حرکت کی سمت ان کے نقطہ تماس پر کے مشترک عماد کی سیدھ میں نہ ہو۔

اس مشترک عماد کی سمت کو خط تصادم کہتے ہیں۔

دو کروں کی صورت میں ان کے مرکزوں کا خط وصل ان کا عماد مشترک ہے۔

۱۱۸- نیوٹن کا تجربی قانون۔ نیوٹن نے بذریعہ تجربہ معلوم کیا کہ اگر دو جسم سیدھے ٹکرائیں تو ٹکر سے پہلے کی اضافی رفتار اور ٹکر کے بعد کی اضافی رفتار دونو کی نسبت ایک مقدار مستقل ہوتی ہے اور دونو کی سمتیں ایک دوسرے کے متقابل ہوتی ہیں۔

(دفعہ ۱۵۱ میں اس تجربہ کا بیان ہے)

اگر جسموں کی ٹکر ٹیڑھی ہو تو اگر ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد عماد مشترک کی سمت میں ان کی اضافی رفتاروں کے جزو تحلیلی لئے جائیں تو ان تحلیلی جزوں کی نسبت ایک مقدار مستقل ہو گی اور یہ جزو متقابل سمتوں میں ہوں گے۔

اس مستقل نسبت کا انحصار جسموں کے مادوں کی قسموں پر ہے ان کے مادوں کی مقداروں پر نہیں ہے۔ اس کو ل سے تعبیر کرتے ہیں اور یہ لچک کی قدر کہلاتی ہے۔

اگر ٹکر سے پہلے دو جسموں کی رفتاروں کے اجزاء تحلیلی ان کے مشترک عماد کی سمت ب (دیکھو شکل دفعہ ۱۲۲) ب اور ب' ہوں اور ٹکر کے بعد رفتاروں کے اجزاء

تحلیلی اسی سمت میں ر اور رَ ہوں تو قانون کا یہ مطلب ہے کہ

ر - رَ = ل (ب - بَ) ...... (۱)

یہ تجربی قانون اس طرح بھی بیان ہو سکتا ہے

رفتارِ تباعد = رفتار تقارب کا ل گنا جہاں یہ دونو رفتاریں دونو جسموں کے نقطہ تصادم پر کے مشترک عماد کی سمت میں ناپی جاتی ہیں۔

دفعہ ۱۲۲ کی مثال میں بائیں ہاتھ کا کرہ دہنے ہاتھ کے کرے سے ٹکراتا ہے اور رفتار تقارب ب - بَ ہے۔ ٹکر سے بعد دہنے ہاتھ کا کرہ دوسرے سے علیحدہ ہوتا ہے اور رفتار تباعد رَ - ر ہے تو اس قانون کے دوسرے بیان دعوے کے بموجب

رَ - ر = ل (ب - بَ)

یہ بعینہ مساوات (۱) ہے

مختلف جسمون کی صورت میں ل کی قیمتوں میں بہت اختلاف ہوتا ہے۔ کانچ کی گولیوں کی صورت میں ل، ۹۴ ، ہے۔ ہاتھی دانت کی گولیوں کی حالت میں ل، ۸۱ ، ہے۔ کاک کی گولیوں کے لئے ل، ۶۵ ، ہے۔ ڈھلے ہوے لوہے کی گولیوں کے لئے ۶۶ ، اور سیسے کی گولیوں کے لئے ۲۰ ، - اور اگر ایک گولی سیسے کی ہو اور دوسری لوہے کی تو ل کی قیمت ۱۳ ، ہوگی۔ جن جسموں کی صورت میں لچک کی قدر صفر ہو

وہ بے لچک کہلاتے ہیں۔ اور جن جسموں کے لئے لچک کی قدر ایک ہے وہ کامل طور پر لچکدار کہلاتے ہیں۔ لیکن اس عالم میں غالباً ایسے جسم نہیں ہیں جو بالکل بے لچک ہوں یا کامل طور پر لچکدار ہوں۔ ان جسموں کی تقریبی مثالیں موجود ہیں مثلاً پٹین اور گندھا ہوا آٹا تقریباً بے لچک ہیں اور کانچ کی گولیوں میں تقریباً کامل لچک ہوتی ہے۔

زیادہ احتیاط سے تجربے کرنے سے یہ ثابت ہوا ہے کہ ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد کی اضافی رفتاروں کی نسبت ایک بالکل مستقل مقدار نہیں ہے۔ بلکہ جب جسموں کی رفتار تقارب بہت زیادہ ہوتی ہے تو اس میں بہت خفیف سی کمی ہوتی ہے۔ بہرحال یہ قانون تقریبی ہے بالکل صحیح نہیں ہے۔

۱۱۹۔ خط تصادم کی عمودی سمت میں دو چکنے جسمونکی حرکت۔

جب دو چکنے جسم ٹکراتے ہیں تو ان کے درمیان مماسی عمل بالکل نہیں ہوتا۔ یعنی جو زور ان کے درمیان ایک دوسرے پر پڑتا ہے وہ صرف عماد مشترک کی سمت میں ہوتا ہے یعنی اس خط کی سمت میں جو نقطہ تماس پر دونو سطحوں پر عمود ہے۔ لہذا اس مشترک عماد کی عمودی سمت میں کوئی قوت عمل نہیں

کرتی اس لئے اس سمت میں رفتار کی تبدیلی بھی نہیں ہوتی۔

اس لئے ہر ایک جسم کی رفتار کا جزء تحلیلی مشترک عماد کی عمودی سمت میں ٹکر سے نہیں بدلتا۔

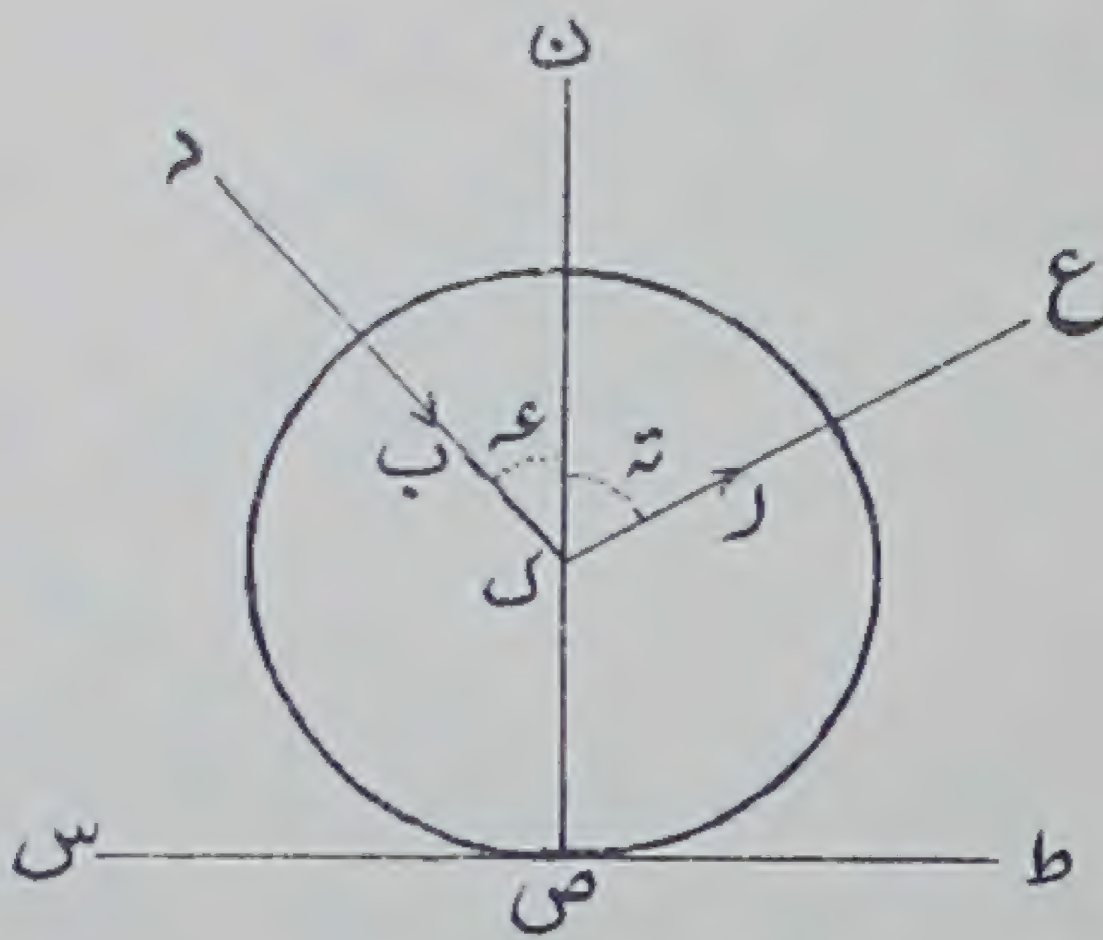
۱۲۰۔ خط تصادم کی سمت میں دو جسموں کی حرکت۔ دفعہ ۸۶ میں ہمیں معلوم ہو چکا ہے کہ جب دو جسم ٹکراتے ہیں تو ان کی حرکت کے معیاروں کا مجموعہ خط تصادم کی سمت میں ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد ایک ہی رہتا ہے۔

اس اصول اور دفعہ ۱۱۹ کے اصول کے ذریعہ اور نیوٹن کے تجربی قانون کی امداد سے ہم ذروں اور چکنے کروں کی حرکت کی وہ تبدیلی معلوم کر سکتے ہیں جو تصادم کی وجہ سے پیدا ہو۔

۱۲۱۔ ایک ثابت سطح سے ٹکر۔ ایک چکنا کرہ یا ذرہ جس کی کمیت م ہے اور جس کی لچک کی قدر ل ہے ایک ثابت سطح سے ٹیڑھا ٹکراتا ہے۔ اس کی رفتار کی تبدیلی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سطح ثابت س ط ہے اور ص دو نقطہ ہے جہاں کرہ ٹکراتا ہے۔ اور ص ن نقطہ ص پر سطح پر عماد ہے یعنی ص ن کرے کے مرکز ک میں سے

گذرتا ہے۔



فرض کرو کہ ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد کرے کی حرکت کی سمتیں د ک اور ک ع ہیں فرض کرو کہ زاویے د ک ن اور ن ک ع، عہ اور تہ ہیں۔

اور فرض کرو کہ کرے کی رفتار ٹکر سے پہلے ب ہے اور ٹکر کے بعد ر ہے جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔

چونکہ سطح چکنی ہے اس لئے سطح کے متوازی کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔ اس لئے کرے کی رفتار کا جزء تحلیلی سطح کے متوازی بالکل نہیں بدلتا۔

∴ ر جب تہ = ب جب عہ ۔ ۔ ۔ ۔ (۱)

نیوٹن کے تجربی قانون سے عماد سطح کی سمت میں رفتارِ تباعد اسی سمت میں رفتار تقارب کا ل گنا ہے۔

اس لئے $\text{ر جم تہ} - ۰ = \text{ل} (\text{ب جم عہ} - ۰)$

$\therefore \text{ر جم تہ} = \text{ل ب جم عہ}$ ..... (۲)

(۱) اور (۲) سے مربعے لیکر جمع کرنے سے

$$\text{ر} = \text{ب} \sqrt{\text{جب}^{2}\,\text{عہ} + \text{ل}^{2}\,\text{جم}^{2}\,\text{عہ}}$$

اور عملِ تقسیم سے

$$\text{مم تہ} = \text{ل مم عہ}$$

ان دو مساواتوں سے ٹکر کے بعد کی رفتار اور سمت حرکت معلوم ہوتی ہے۔

ٹکر کی قوت کا جو صدمہ سطح پر ہے۔ اس کے مساوی اور متقابل صدمہ کرُے پر ہے۔ اور اس کی مقدار کرُے کے معیار حرکت کی تبدیلی ہے جو سطح کی عمودی سمت میں پیدا ہوئی۔

اس لئے ٹکر کا صدمہ $= \text{م ب جم عہ} + \text{م ر جم تہ}$

$= \text{م} (۱ + \text{ل}) \text{ب جم عہ}$

نتیجہ صریح (۱)۔ اگر ٹکر سیدھی ہو تو $\text{عہ} = ۰$

$\therefore \text{تہ} = ۰$ اور $\text{ر} = \text{ل ب}$

پس اگر ایک کرہ ایک سطح سے سیدھا ٹکرائے تو اسکی حرکت بالکل متقابل سمت میں ہو جاتی ہے اور اسکی رفتار ۱ : ل کی نسبت میں کم ہو جاتی ہے۔

باب ہشتم

لچکدار جسموں کا تصادم

(۱۱۶) اگر ایک کانچ کی گولی ایک شخص کے ہاتھ سے سنگ مرمر کے فرش پر گرے تو وہ اچھی خاصی دور یعنی تقریباً اس کے ہاتھ تک اچھلتی ہے۔ اگر وہی گولی لکڑی کے فرش پر گرے تو بہت کم دور اچھلتی ہے۔

اگر ہم دو گولے لیں ایک کانچ کا اور دوسرا ہاتھی دانت کا بلیرڈ کھیلنے کا گولہ اور دونو گولوں کو ایک ہی بلندی سے فرش پر گرائیں تو دونو اچھل کر مختلف بلندیوں تک جائیں گے۔

اگر ہم سیسے کی گولی اسی بلندی سے اسی فرش پر گرائیں تو وہ کانچ اور ہاتھی دانت کے گولوں سے بہت کم اچھلے گی

جس وقت یہ جسم فرش پر پہنچتے ہیں اس وقت ان

سب کی رفتاریں تو ایک ہی ہوتی ہیں۔ لیکن چونکہ وہ اچھل کر مختلف بلندیوں تک جاتے ہیں اس لئے جس وقت یہ جسم فرش سے ٹکرا کر اوپر کو جانا شروع کرتے ہیں اس وقت ان کی رفتاریں مختلف ہوں گی۔

جسموں کی یہ خاصیت جس کی وجہ سے فرش سے ٹکرانے کے بعد ان کی رفتاریں مختلف ہوتی ہیں ان کی **لچک** کہلاتی ہے۔

اس باب میں ہم لچکدار جسموں کے تصادم کی آسان صورتوں پر غور کرینگے یعنی ہم صرف ایسی صورتوں پر غور کرینگے جہاں ذرے ذروں سے یا سطحوں سے ٹکرائیں یا چکنے یکذات کرے چکنی سطحوں یا چکنے کروں سے ٹکرائیں۔

۱۱۷۔ **تعریف**۔ دو جسموں کی ٹکر یا تصادم اس صورت میں سیدھی ٹکر یا تصادمِ راست کہلاتی ہے جب ان کی حرکت کی سمت ان کے نقطہ تماس پر کے عماد مشترک کی سیدھ میں ہو

ان کی ٹکر کو ٹیڑھی ٹکر یا تصادمِ کج اس صورت میں کہتے ہیں جب ان میں سے ایک کی یا دونوں کی حرکت کی سمت ان کے نقطہ تماس پر کے مشترک عماد کی سیدھ میں نہ ہو۔

اس مشترک عماد کی سمت کو خط تصادم کہتے ہیں۔

دو کروں کی صورت میں ان کے مرکزوں کا خط وصل ان کا عماد مشترک ہے۔

۱۱۸- **نیوٹن کا تجربی قانون**- نیوٹن نے بذریعہ تجربہ معلوم کیا کہ اگر دو جسم سیدھے ٹکرائیں تو ٹکر سے پہلے کی اضافی رفتار اور ٹکر کے بعد کی اضافی رفتار دونو کی نسبت ایک مقدار مستقل ہوتی ہے اور دونو کی سمتیں ایک دوسرے کے متقابل ہوتی ہیں۔

(دفعہ ۱۵۱ میں اس تجربہ کا بیان ہے)

اگر جسموں کی ٹکر ٹیڑھی ہو تو اگر ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد عماد مشترک کی سمت میں ان کی اضافی رفتاروں کے جزء تحلیلی لئے جائیں تو ان تحلیلی جزوں کی نسبت ایک مقدار مستقل ہو گی اور یہ جزء متقابل سمتوں میں ہوں گے۔

اس مستقل نسبت کا انحصار جسموں کے مادوں کی قسموں پر ہے ان کے مادوں کی مقداروں پر نہیں ہے۔ اس کو ل سے تعبیر کرتے ہیں اور یہ لچک کی قدر کہلاتی ہے۔

اگر ٹکر سے پہلے دو جسموں کی رفتاروں کے اجزاء تحلیلی ان کے مشترک عماد کی سمت میں (دیکھو شکل دفعہ ۱۲۲) ب اور ب٪ ہوں اور ٹکر کے بعد رفتاروں کے اجزاء

تحلیلی اسی سمت میں ر اور رَ ہوں تو قانون کا یہ مطلب ہے کہ

رَ - رَ = - ل (ب - بَ) .... (۱)

یہ تجربی قانون اس طرح بھی بیان ہو سکتا ہے

رفتارِ تباعد = رفتار تقارب کا ل گنا جہاں یہ دونو رفتاریں دونو جسموں کے نقطہ تصادم پر کے مشترک عماد کی سمت میں ناپی جاتی ہیں۔

دفعہ ۱۲۲ کی مثال میں بائیں ہاتھ کا کرہ دہنے ہاتھ کے کرے سے ٹکراتا ہے اور رفتار تقارب ب - بَ ہے۔ ٹکر سے بعد دہنے ہاتھ کا کرہ دوسرے سے علیحدہ ہوتا ہے اور رفتار تباعد رَ - ر ہے تو اس قانون کے دوسرے بیان دعوے کے بموجب

رَ - ر = ل (ب - بَ)

یہ بعینہ مساوات (۱) ہے

مختلف جسموں کی صورت میں ل کی قیمتوں میں بہت اختلاف ہوتا ہے۔ کانچ کی گولیوں کی صورت میں ل، ۹۴، ہے۔ ہاتھی دانت کی گولیوں کی حالت میں ل، ۸۱، ہے۔ کاک کی گولیوں کے لئے ل، ۶۵، ہے۔ ڈھلے ہوے لوہے کی گولیوں کے لئے ۶۶، اور سیسے کی گولیوں کے لئے ۲۰، ۔ اور اگر ایک گولی سیسے کی ہو اور دوسری لوہے کی تو ل کی قیمت ۱۳، ہوگی۔ جن جسموں کی صورت میں لچک کی قدر صفر ہو

وہ بے لچک کہلاتے ہیں۔ اور جن جسموں کے لئے لچک کی قدر ایک ہے وہ کامل طور پر لچکدار کہلاتے ہیں۔ لیکن اس عالم میں غالباً ایسے جسم نہیں ہیں جو بالکل بے لچک ہوں یا کامل طور پر لچکدار ہوں۔ ان جسموں کی تقریبی مثالیں موجود ہیں مثلاً پٹین اور گندھا ہوا آٹا تقریباً بے لچک ہیں اور کانچ کی گولیوں میں تقریباً کامل لچک ہوتی ہے۔

زیادہ احتیاط سے تجربے کرنے سے یہ ثابت ہوا ہے کہ ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد کی اضافی رفتاروں کی نسبت ایک بالکل مستقل مقدار نہیں ہے۔ بلکہ جب جسموں کی رفتار تقارب بہت زیادہ ہوتی ہے تو اس میں بہت خفیف سی کمی ہوتی ہے۔ بہرحال یہ قانون تقریبی ہے بالکل صحیح نہیں ہے۔

۱۱۹۔ خط تصادم کی عمودی سمت میں دو چکنے جسمونکی حرکت۔

جب دو چکنے جسم ٹکراتے ہیں تو ان کے درمیان مماسی عمل بالکل نہیں ہوتا۔ یعنی جو زور ان کے درمیان ایک دوسرے پر پڑتا ہے وہ صرف عماد مشترک کی سمت میں ہوتا ہے یعنی اس خط کی سمت میں جو نقطہ تماس پر دونو سطحوں پر عمود ہے۔ لہذا اس مشترک عماد کی عمودی سمت میں کوئی قوت عمل نہیں

کرتی اس لئے اس سمت میں رفتار کی تبدیلی بھی نہیں ہوتی۔

اس لئے ہر ایک جسم کی رفتار کا جزء تحلیلی مشترک عماد کی عمودی سمت میں ٹکر سے نہیں بدلتا۔

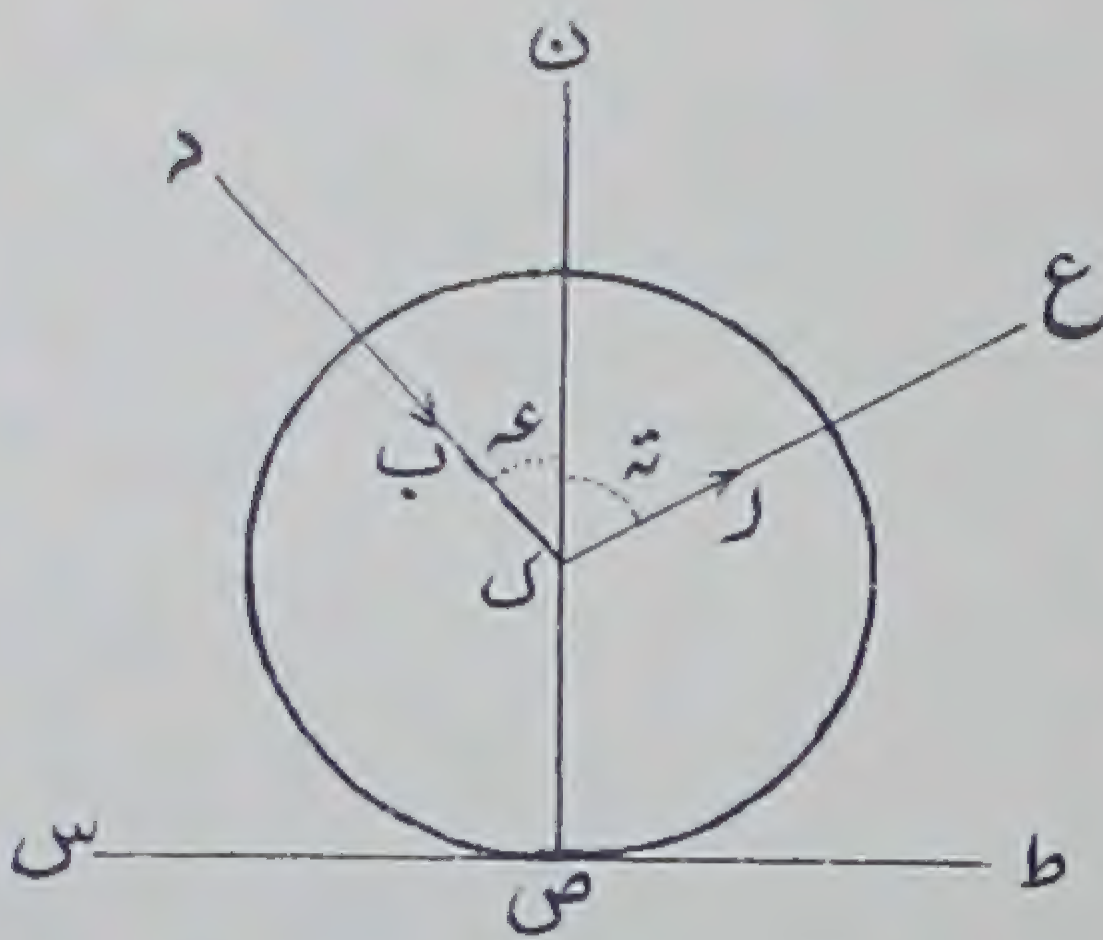
۱۲۰۔ خط تصادم کی سمت میں دو جسموں کی حرکت۔ دفعہ ۸۶ میں ہمیں معلوم ہو چکا ہے کہ جب دو جسم ٹکراتے ہیں تو ان کی حرکت کے معیاروں کا مجموعہ خط تصادم کی سمت میں ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد ایک ہی رہتا ہے۔

اس اصول اور دفعہ ۱۱۹ کے اصول کے ذریعہ اور نیوٹن کے تجربی قانون کی امداد سے ہم ذروں اور چکنے کروں کی حرکت کی وہ تبدیلی معلوم کر سکتے ہیں جو تصادم کی وجہ سے پیدا ہو۔

۱۲۱۔ **ایک ثابت سطح سے ٹکر**۔ ایک چکنا کرہ یا ذرہ جس کی کمیت م ہے اور جس کی لچک کی قدر ل ہے ایک ثابت سطح سے ٹیڑھا ٹکراتا ہے۔ اس کی رفتار کی تبدیلی معلوم کرو۔

فرض کرو کہ سطح ثابت س ط ہے اور ص وہ نقطہ ہے جہاں کرہ ٹکراتا ہے۔ اور ص ن نقطہ ص پر سطح پر عماد ہے یعنی ص ن کرے کے مرکز ک میں سے

گذرتا ہے۔



فرض کرو کہ ٹکر سے پہلے اور ٹکر کے بعد کرے کی حرکت کی سمتیں د ک اور ک ع ہیں فرض کرو کہ زاوئے د ک ن اور ن ک ع، عہ اور تہ ہیں۔

اور فرض کرو کہ کرے کی رفتار ٹکر سے پہلے ب ہے اور ٹکر کے بعد ر ہے جیسا کہ شکل میں دکھلایا گیا ہے۔

چونکہ سطح چکنی ہے اس لئے سطح کے متوازی کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔ اس لئے کرے کی رفتار کا جزء تحلیلی سطح کے متوازی بالکل نہیں بدلتا۔

∴ ر جب تہ = ب جب عہ . . . . (۱)

نیوٹن کے تجربی قانون سے عماد سطح کی سمت میں رفتارِ تباعد اسی سمت میں رفتار تقارب کا ل گنا ہے۔

اس لئے   ر جم تہ - ۰ = ل (ب جم عہ - ۰)

∴   ر جم تہ   = ل ب جم عہ ..... (۲)

(۱) اور (۲) سے مربعے لیکر جمع کرنے سے

$$\text{ر} = \text{ب}\sqrt{\text{جب}^2\,\text{عہ} + \text{ل}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ}}$$

اور عملِ تقسیم سے

مم تہ = ل مم عہ

ان دو مساواتوں سے ٹکر کے بعد کی رفتار اور سمت حرکت معلوم ہوتی ہے۔

ٹکر کی قوت کا جو صدمہ سطح پر ہے۔ اس کے مساوی اور متقابل صدمہ کرُے پر ہے۔ اور اس کی مقدار کرُے کے معیار حرکت کی تبدیلی ہے جو سطح کی عمودی سمت میں پیدا ہوئی۔

اس لئے ٹکر کا صدمہ = م ب جم عہ + م ر جم تہ

= م (۱ + ل) ب جم عہ

نتیجہ صریح (۱) - اگر ٹکر سیدھی ہو تو عہ = ۰

∴ تہ = ۰   اور ر = ل ب

پس اگر ایک کرہ ایک سطح سے سیدھا ٹکرائے تو اسکی حرکت بالکل متقابل سمت میں ہو جاتی ہے اور اسکی رفتار ۱ : ل کی نسبت میں کم ہو جاتی ہے۔

نتیجہ صریح (۲)۔ اگر لچک کی قدر ایک ہو تو تہ = عہ
اور ر = ب

یعنی جب کرہ کی لچک کامل ہو تو زاویۂ وقوع اور زاویۂ انعکاس مساوی ہوتے ہیں اور رفتار مقدار میں نہیں بدلتی۔

نتیجہ صریح (۳) اگر لچک کی قدر صفر ہو تو تہ = ۹۰°
اور ر = ب جب عہ

پس اگر کرہ بالکل بے لچک ہو تو سطح سے ٹکرانے کے بعد سطح پر حرکت کرے گا اور اس کی رفتار کا جزء تحلیلی سطح کے متوازی نہیں بدلیگا

مثال۔ ایک گولی ۱۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہوئی ایک ثابت چکنی سطح سے ۴۵° کے زاویہ پر ٹکراتی ہے۔ اگر لچک کی قدر $\frac{۴}{۵}$ ہو تو ٹکر ہونے کے بعد گولی کی رفتار اور سمتِ حرکت معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد گولی کی رفتار ر سطح سے زاویہ تہ بناتی ہے۔

ٹکر سے پہلے رفتار کے اجزاء تحلیلی سطح کے متوازی اور سطح کی عمودی سمت میں $۱۰ \times \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ اور $۱۰ \frac{۱}{\sqrt{۲}}$ یعنی $۵\sqrt{۲}$ اور $۵\sqrt{۲}$ ہیں۔

ٹکر کے بعد رفتار کے اجزاء تحلیلی انہی دو سمتوں میں ر جم تہ اور ر جب تہ ہیں۔

اس لئے ر جم تہ = ۵ √۲

اور ر جب تہ = ل × ۵ √۲ = ۴ √۲

لہذا مربع لے کر جمع کرنے سے

ر^{۲} = ۸۲ ∴ ر = √۸۲ = ۹٫۰۶

نیز عمل تقسیم سے

مس تہ = ۴/۵

طبعی مماسوں کے جدول سے تہ = ۳۸° ۴۰′ تقریباً
پس ٹکر کے بعد گولی ۹٫۰۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے سطح سے ۳۸° ۴۰′ کا زاویہ بناتی ہوئی حرکت کرتی ہے۔

امثلہ نمبری (۳۰)

(۱) کانچ کی ایک گولی ۹ فٹ کی بلندی سے ایک افقی فرش پر گرتی ہے۔ اگر لچک کی قدر ۹٫ ہو تو دریافت کرو کہ فرش سے ٹکرا کر وہ کہاں تک اوپر جائے گی؟

(۲) ہاتھی دانت کی ایک گولی ۲۵ فٹ کی بلندی سے ایک افقی پتھر پر گرتی ہے اور پتھر سے ٹکرانے کے بعد اچھل کر ۱۶ فٹ اوپر کو جاتی ہے۔ ثابت کرو کہ پتھر اور گولی کے درمیان لچک کی قدر ۸٫ ہے۔

(۳) ایک وزنی لچکدار گولی ایک کمرے کی چھت سے گرتی ہے اور فرش سے دو دفعہ اچھل کر چھت کی نصف

بلندی تک پہنچتی ہے۔ ثابت کرو کہ لچک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۴) ایک کمرے کے فرش کے ایک نقطے سے جو ایک دیوار کے پایہ میں ہے ایک گولی اس طرح چلائی جاتی ہے کہ وہ مقابل کی دیوار سے ٹکرا کر اسی نقطے پر واپس آجاتی ہے جہاں سے وہ چلی تھی۔ اگر لچک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہو تو ثابت کرو کہ گولی کو جانے میں جس قدر وقت لگتا ہے اس سے نصف واپس آنے میں صرف ہوتا ہے۔

(۵) ایک کمرے کے ایک نقطے سے ایک گیند $32\sqrt{3}$ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اوپر وار پھینکا جاتا ہے۔ اگر کمرے کی بلندی ۱۶ فٹ ہو اور چھت اور گیند کے درمیان اور فرش اور گیند کے درمیان لچک کی قدر ایک ہی ہو اور $\frac{1}{\sqrt{2}}$ کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ گیند پہلے چھت سے ٹکرا کر اور پھر فرش سے ٹکرا کر عین چھت تک پہنچ جائے گا۔

(۶) ایک گولی ۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتی ہوئی ایک چکنی سطح سے ۳۰ فٹ کے زاویہ پر ٹکراتی ہے۔ ٹکر کے بعد اس کی رفتار اور سمت حرکت معلوم کرو۔ لچک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے۔

(۷) ایک کرہ ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ایک چکنی سطح سے ٹکراتا ہے۔ اس کی حرکت کی سمت

سطح سے زاویہ جب$^{-1}$ $\frac{۳}{۵}$ (= ۳۶° ۵۲َ) بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد اس کی رفتار ۲ $\sqrt{۵}$ (= ۴٫۴۷) فی ثانیہ ہے اور سطح سے زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{۱}{۲}$ (= ۲۶° ۳۴َ) بناتی ہے۔ لچک کی قدر $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

(۸) ایک گولی ۱۶ فٹ کی بلندی سے ایک سطح پر گرتی ہے جس کا میلان افق سے (۱) ۳۰° (۲) ۴۵° (۳) ۶۰° ہے۔ تینوں صورتوں میں ٹکر کے بعد رفتار اور سمت حرکت دریافت کرو۔ لچک کی قدر $\frac{۳}{۴}$ ہے۔

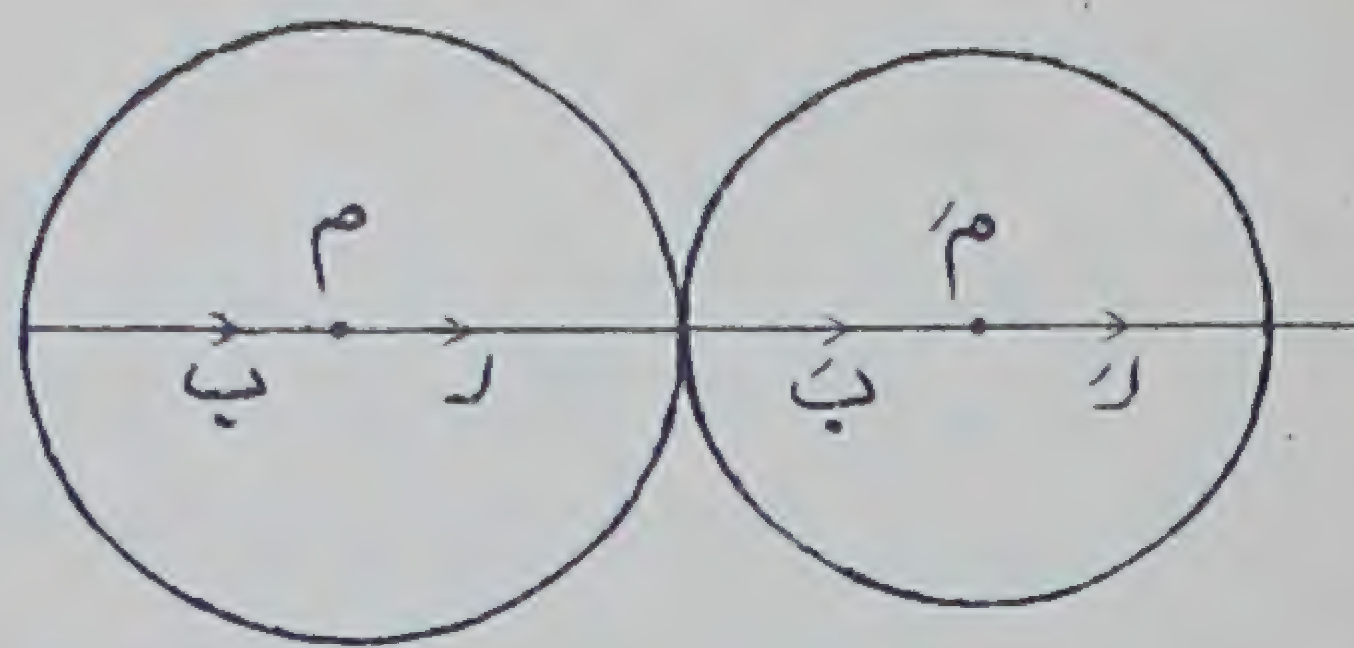
۱۲۲۔ دو کروں کی سیدھی ٹکر۔ کمیت م کا

ایک چکنا کرہ رفتار ب سے حرکت ہوا، کمیت مَ کے ایک دوسرے چکنے کرے سے جو اسی سمت میں رفتار بَ سے حرکت کرتا ہے، سیدھا ٹکراتا ہے۔ اگر لچک کی قدر ل ہو تو ٹکر کے بعد کروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد کروں کی رفتاریں ر اور رَ ہیں۔ چونکہ رفتارِ تقارب (ب ـ بَ) ہے اور رفتار تباعد (رَ ـ ر) ہے اس لئے نیوٹن کے تجربی قانون کے

بموجب

$$\text{رَ ـ ر = ل (ب ـ بَ)} \quad \ldots\ldots (۱)$$



چونکہ دوران تصادم میں جسموں پر صرف ایک ہی قوت عمل کرتی ہے یعنی مرکزوں کے خط وصل کی سمت میں چوٹ ۔ اس لئے بموجب دفعہ ۱۲۰ دونوں کی حرکت کے معیاروں کا مجموعہ نہیں بدلتا ۔

پس م ر + مَ رَ = م ب + مَ بَ ....(۲)

(۱) کو مَ سے ضرب دیکر (۲) سے تفریق کرنے سے

(م + مَ) ر = (م − ل مَ) ب + مَ (۱ + ل) بَ

(۱) کو م سے ضرب دیکر (۲) میں جمع کرنے سے

(م + مَ) رَ = م (۱ + ل) ب + (مَ − ل م) بَ

ان دو مساواتوں سے ٹکر کے بعد کی رفتاریں حاصل ہوتی ہیں اگر دوسرے کرے کی سمت حرکت پہلے کی سمتِ حرکت کے متقابل ہو تو ہمیں بَ کی علامت بدلنی چاہیئے ۔

نیز کرہ م پر چوٹ کا صدمہ

= اس کے معیارِ حرکت کی تبدیلی

= م (ب - ر) = $\frac{\text{م مَ}}{\text{م + مَ}}$ (۱ + ل)(ب - بَ)

دوسرے کرے پر صدمہ اس کے مساوی اور متقابل ہے۔

نتیجہ صریح ۔ اگر م = مَ اور ل = ۱

تو ر = بَ اور رَ = ب

پس اگر دو مساوی کرے جن کی لچک کامل ہو آپس میں سیدھے ٹکرائیں تو ان کی رفتاروں کا باہمی تبادلہ ہو جاتا ہے۔

۱۲۳۔ **مثال** (۱) ایک گولہ جس کی کمیت ۱۰ پونڈ ہے ۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اسکے پیچھے اسی سمت میں ایک اور گولہ جس کی کمیت ۸ پونڈ ہے ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا آتا ہے اور پہلے گولے سے ٹکراتا ہے۔ اگر ل = ½ تو ٹکر کے بعد گولوں کی رفتاریں معلوم کرو۔

فرض کرو کہ مطلوبہ رفتاریں ر اور رَ ہیں

چونکہ مجموعی معیار حرکت نہیں بدلتا

∴ ۸ ر + ۱۰ رَ = ۸ × ۴ + ۱۰ × ۲ = ۵۲

نیوٹن کے قانون سے

رَ - ر = ½ (۴ - ۲) = ۱

ان مساواتوں کو حل کرنے سے

ر = ۲⅓ اور رَ = ۳⅓ فٹ فی ثانیہ

مثال (۲) اگر مثال (۱) میں گولوں کی حرکت کی سمتیں ایک دوسرے کے متقابل ہوں تو ٹکر کے بعد کی رفتاریں معلوم کرو۔

اس سوال میں مساواتیں یہ ہونگی

۸ ر + ۱۰ رَ = ۸ × ۴ - ۱۰ × ۲ = ۱۲

اور رَ - ر = $\frac{1}{2}$ (۴ + ۲) = ۳

کیونکہ رَ - ر رفتارِ تباعد ہے اور ۴ + ۲ رفتارِ تقارب ہے۔

ان مساواتوں کو حل کرنے سے

ر = -۱ ، رَ = ۲ فٹ فی ثانیہ

اس سے ظاہر ہے کہ ٹکر کے بعد دونو گولے پیچھے ہٹتے ہیں کیونکہ مثبت رفتار اس سمت میں فرض کی گئی ہے جس سمت میں ۸ پونڈ کا گولہ ٹکر سے پہلے حرکت کر رہا تھا۔

۱۲۴ - دو کروں کی ٹیڑھی ٹکر۔ م کمیت کا

ایک چکنا کرہ رفتار ب سے حرکت کرتا ہوا ایک دوسرے چکنے کرے سے ٹیڑھا ٹکراتا ہے۔ دوسرے کرے کی کمیت مَ اور رفتار بَ ہے۔ اگر ٹکر سے پہلے کروں کی حرکت کی سمتیں مرکزوں کے خطِ وصل سے بالترتیب زاوئے عہ اور بہ بنائیں اور لچک کی قدر ل ہو تو ٹکر کے بعد رفتاریں اور حرکت کی سمتیں دریافت کرو۔

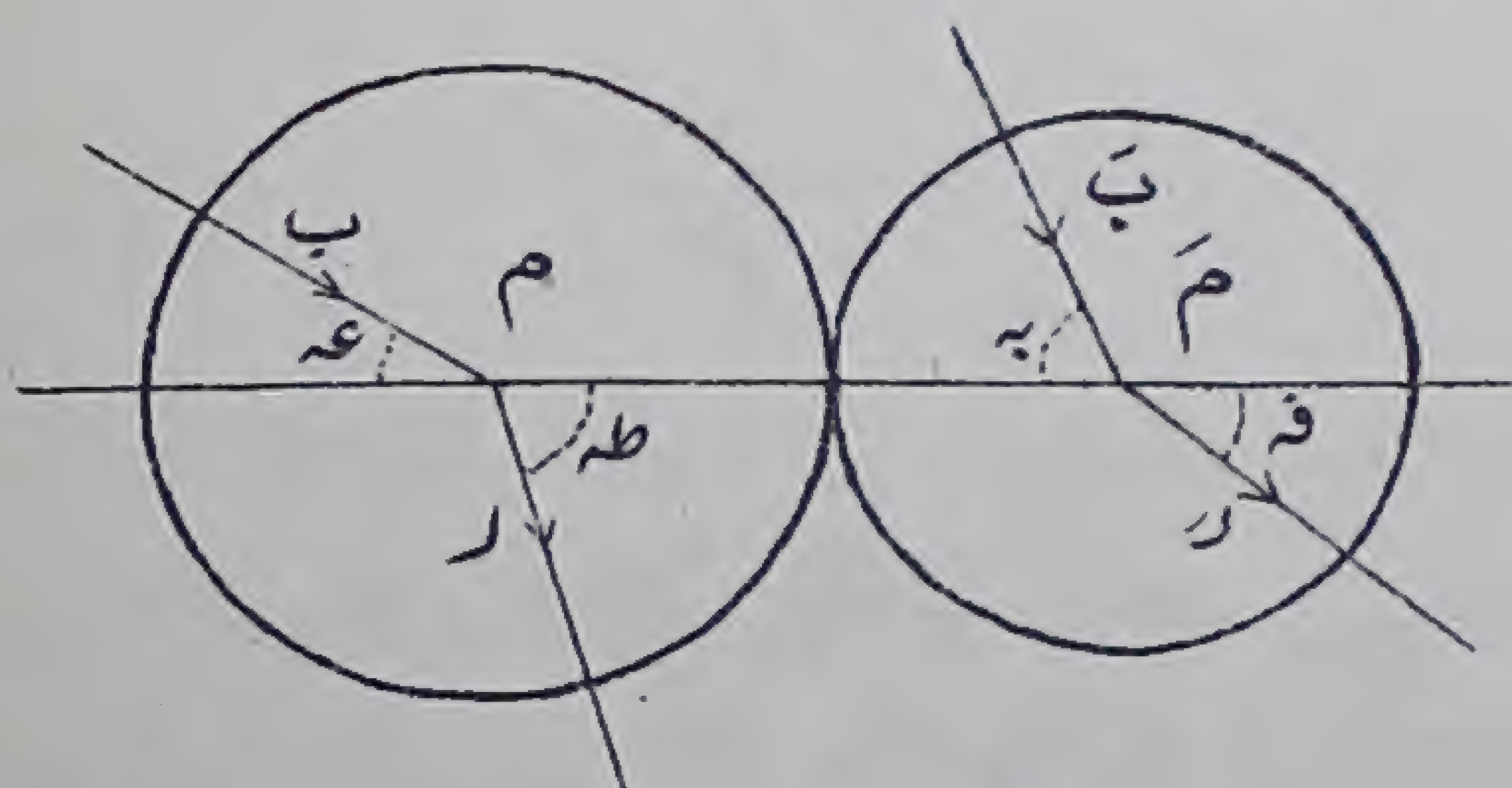
فرض کرو کہ کروں کی رفتاریں ٹکر کے بعد ر اور رَ ہیں

اور وہ خطِ مرکزین سے بالترتیب زاوئے طہ اور فہ بناتی ہیں۔

چونکہ کرے چکنے ہیں اس لئے ان کے خطِ مرکزین کی عمودی سمت میں کوئی قوت عمل نہیں کرتی۔ اسلئے اس سمت میں رفتاریں نہیں بدلتیں۔

پس ر جب طہ = ب جب عہ .... (۱)

رَ جب فہ = بَ جب بہ .... (۲)



چونکہ سمت عماد میں رفتار تقارب ب جم عہ - بَ جم بہ ہے اور اس سمت میں رفتارِ تباعد رَ جم فہ - ر جم طہ ہے اس لئے بموجبِ قانونِ نیوٹن

رَ جم فہ - ر جم طہ = ل (ب جم عہ - بَ جم بہ)...(۳)

نیز چونکہ دورانِ تصادم میں کروں پر صرف ایک قوت عمل کرتی ہے اور وہ خط مرکزین کی سمت میں ہے اس لئے اس سمت میں مجموعی معیارِ حرکت نہیں بدلتا۔

∴ م ر جم طہ + مَ رَ جم فہ = م ب جم عہ + مَ بَ جم بہ...(۴)

مساواتوں (۱)، (۲)، (۳)، ۴، سے مقادیر مجہول
ر، رَ، طہ، فہ، معلوم ہو سکتی ہیں
(۳) کو مَ سے ضرب دیکر (۴) سے تفریق کرنے سے

$$\text{ر جم طہ} = \frac{(\text{م} - \text{ل مَ})\,\text{ب جم عہ} + \text{مَ}(۱ + \text{ل})\,\text{بَ جم بہ}}{\text{م} + \text{مَ}} \quad ....(۵)$$

اسی طرح (۳) کو مَ سے ضرب دیکر (۴) میں جمع کرنے سے

$$\text{رَ جم فہ} = \frac{\text{م}(۱ + \text{ل})\,\text{ب جم عہ} + (\text{مَ} - \text{ل م})\,\text{بَ جم بہ}}{\text{م} + \text{مَ}} \quad ....(۶)$$

(۱)، اور (۵) سے، مربعے لیکر جمع کرنے سے $\text{ر}^۲$ اور تقسیم کرنے سے مس طہ حاصل ہوگا۔
اسی طرح (۲) اور (۶) سے $\text{رَ}^۲$ اور مس فہ حاصل ہونگے۔
پس حرکت پورے طور پر معلوم ہوگئی
پہلے کرے پر چوٹ کا صدمہ = اس کے معیارِ حرکت کی تبدیلی

$$= \text{م}\,(\text{ب جم عہ} - \text{ر جم طہ})$$

$$= \frac{\text{م مَ}}{\text{م} + \text{مَ}}\,(۱ + \text{ل})\,(\text{ب جم عہ} - \text{بَ جم بہ})$$ مختصر کرنے سے۔

چوٹ کا صدمہ دوسرے کرے پر اس کے مساوی اور متقابل ہے

نتیجہ صریح (۱) اگر ب' = ۰ تو مساوات (۲) سے

فہ = ۰، اس لئے کرہ مَ خط مرکزین کی سمت میں حرکت کرتا ہے - یہہ نتیجہ اس کے بغیر بھی نکل سکتا ہے کیونکہ مَ پر صرف ایک ہی قوت عمل کرتی ہے اور وہ خط مرکزین کی سیدھ میں ہے -

نتیجہ صریح (۲) اگر م = مَ اور ل = ۱ تو

رَ جم طہ = بَ جم بہ اور رَ جم فہ = ب جم عہ

پس اگر دو مساوی چکنے کرے جو مکمل طور پر لچکدار ہیں آپس میں ٹکرائیں تو خط مرکزین کی سمت میں ان کی رفتاروںکا باہمی تبادلہ ہو جاتا ہے -

۱۲۵- مثال (۱) ۵ پونڈ کمیت کا ایک گولہ ۱۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ۱۰ پونڈ کمیت کے ایک گولے سے ٹکراتا ہے - ۱۰پونڈ کا گولہ ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے - اگر ان کی رفتاریں متوازی ہوں اور بوقتِ تصادم خطِ مرکزین سے °۳۰ کا زاویہ بنائیں تو ٹکر کے بعد کی حرکت معلوم کرو - لچک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہے -

فرض کرو کہ ٹکر کے بعد رفتاریں رَ اور رَ' ہیں اور خط مرکزین سے زاوئے طہ اور فہ بناتی ہیں -

چونکہ خط مرکزین کی عمودی سمت میں رفتاریں نہیں

بدلتیں اس لئے

ر جب طہ = ۱۵ جب ۳۰° = ۱۵/۲ ...... (۱)

رَ جب فہ = ۵ جب ۳۰° = ۵/۲ ...... (۲)

نیوٹن کے قانون سے

رَ جم فہ - ر جم طہ = ½ [۱۵ جم ۳۰° - ۵ جم ۳۰°] = ۵ √۳/۲ ...... (۳)

چونکہ خط تصادم کی سمت میں معیار حرکت نہیں بدلتا

∴ ۵ ر جم طہ + ۱۰ رَ جم فہ = ۵ × ۱۵ × √۳/۲ + ۱۰ × ۵ × √۳/۲

∴ ر جم طہ + ۲ رَ جم فہ = ۲۵ √۳/۲ .... (۴)

(۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

ر جم طہ = ۵ √۳/۲ .... (۵)

رَ جم فہ = ۵ √۳ .... (۶)

(۱) اور (۵) سے

ر = ۵ √۳ = ۸٫۶۶ فٹ فی ثانیہ تقریباً اور طہ = ۶۰°

(۲) اور (۶) سے

رَ = ۵/۲ √۱۳ = ۹ فٹ فی ثانیہ تقریباً اور مس فہ = ۱/(۲√۳) = √۳/۶

اس لئے طبعی مماسوں کے جدول سے فہ = ۱۶° ۶َ

مثال (۲) دو چکنے کرے جن میں سے ایک کی کمیت دوسرے سے دونی ہے مساوی رفتاروں سے متوازی متقابل سمتوں میں حرکت کرتے ہوئے آپس میں

ٹکراتے ہیں۔ ٹکر کے وقت ان کی حرکت کی سمتیں خطِ مرکزین سے ۳۰° کے زاویے بناتی ہیں۔ اگر لچک کی قدر ½ ہو تو تصادم کے بعد رفتاریں اور حرکت کی سمتیں دریافت کرو۔

فرض کرو کہ گولوں کی کمیتیں م اور ۲م ہیں اور تصادم کے بعد رفتاریں ل اور لَ ہیں اور خط مرکزین سے زاویے طہ اور فہ بناتی ہیں اور فرض کرو کہ ٹکر سے پہلے ہر ایک کی رفتار ب ہے۔

چونکہ خط مرکزین کی عمودی سمت میں رفتاریں نہیں بدلتیں

∴ ل جب طہ = ب جب ۳۰° = ب/۲ ...... (۱)

اور لَ جب فہ = ب جب ۳۰° = ب/۲ ...... (۱)

چونکہ سمت عماد میں رفتار تقارب ب جم ۳۰° + ب جم ۳۰° ہے اور اسی سمت میں رفتار تباعد لَ جم فہ - ل جم طہ ہے اس لئے نیوٹن کے قانون کے ذریعہ

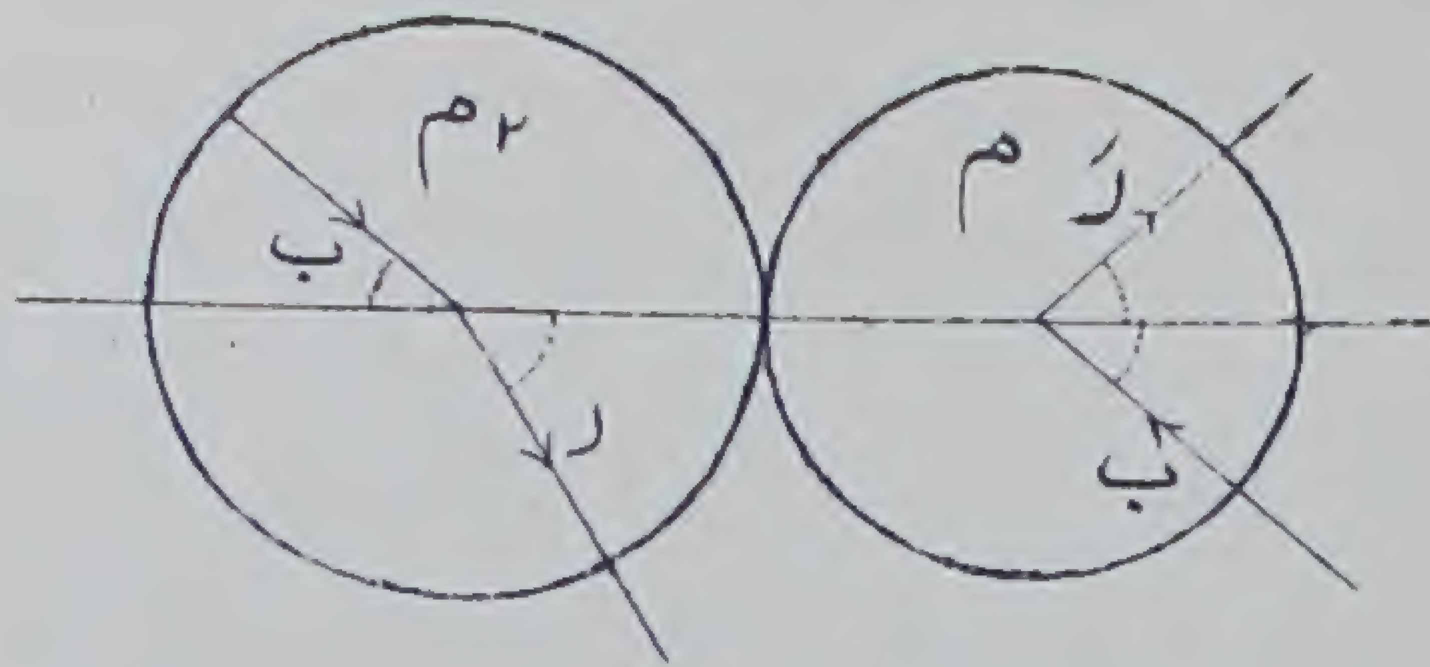
لَ جم فہ - ل جم طہ = ل [ب جم ۳۰° + ب جم ۳۰°]

یعنی لَ جم فہ - ل جم طہ = (√۳/۲) ب .... (۳)

چونکہ خط مرکزین کی سمت میں معیارِ حرکت نہیں بدلتا

∴ ۲م ل جم طہ + م لَ جم فہ = ۲م ب جم ۳۰° - م ب جم ۳۰°

∴ ۲ ل جم طہ + لَ جم فہ = (√۳/۲) ب ...... (۴)



(۳) اور (۴) کو حل کرنے سے

رجم طہ = ۰ اور رَ جم فہ = $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ب

ان مساواتوں اور (۱) و (۲) سے

طہ = ۹۰°، ر = $\frac{ب}{۲}$، فہ = ۳۰°، رَ = ب

پس تصادم کے بعد بڑا گولہ اپنی پہلی رفتار کے نصف سے خط مرکزین کی عمودی سمت میں حرکت کرنا شروع کرتا ہے اور چھوٹا گولہ اسی طرح حرکت کرتا ہے جیساکہ کامل طور پر لچکدار ہونے کی صورت میں ایک ثابت سطح سے ٹکرا کر حرکت کرے۔

امثلہ نمبری (۲۱)

(۱) ۴ پونڈ کمیت کا ایک کرہ ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا ۳ پونڈ کمیت کے ایک

دوسرے کرے سے ٹکراتا ہے جو اسی سمت میں ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اگر ٹکر سیدھی ہو اور لچک کی قدر $\frac{1}{2}$ ہو تو تصادم کے بعد کروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

(۲) ۱۰ پونڈ کمیت کا ایک گولہ ۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اور اسی سمت میں ۸ پونڈ کمیت کا ایک اور گولہ ۳ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے۔ اگر پہلا دوسرے سے سیدھا ٹکرائے اور لچک کی قدر $\frac{3}{4}$ ہو تو ٹکر کے بعد کروں کی رفتاریں معلوم کرو۔

(۳) ایک کرہ ۱۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتا ہوا، ایک مساوی کرے سے جو ۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے متقابل سمت میں حرکت کر رہا ہے، ٹکراتا ہے۔ اگر لچک کی قدر $\frac{1}{3}$ ہو تو ٹکر کے بعد رفتاریں معلوم کرو۔

(۴) اگر ایک گولہ اپنے سے دونے گولے سے ٹکرائے جبکہ دونو ایک ہی سمت میں حرکت کر رہے ہوں اور چھوٹے کی رفتار بڑے کی رفتار سے سات گنا ہو اور اگر دونو کے درمیان لچک کی قدر $\frac{3}{4}$ ہو تو ثابت کرو کہ چھوٹا گولہ بڑے گولے سے ٹکرانے کے بعد ساکن ہو جائے گا۔

(۵) اگر دو گولوں کی کمیتوں کی نسبت ۲ : ۱ ہو اور

ان کی رفتاروں کی نسبت ٹکر سے پہلے ۱ : ۲ ہو اور انکی رفتاریں ایک دوسرے کے متقابل ہوں اور لچک کی قدر $\frac{۵}{۶}$ ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد ہر ایک گولہ کی رفتار اس کی پہلی رفتار کا $\frac{۵}{۶}$ ہو گی اور متقابل سمت میں ہو گی۔

(۶) ایک کرہ ایک دوسرے ساکن کرے سے سیدھا ٹکراتا ہے۔ اگر لچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد ان کی رفتاروں کی نسبت

۱ - ل : ۱ + ل ہو گی

(۷) م کمیت کا ایک گولہ رفتار ب سے حرکت کرتا ہوا، ل م کمیت کے ایک دوسرے گولے سے جو ل ب رفتار سے متقابل سمت میں حرکت کر رہا ہے، سیدھا ٹکراتا ہے۔ اگر لچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد دوسرے گولے کی رفتار وہی ہو گی جو ٹکر کے قبل پہلے گولے کی تھی۔

(۸) ۲ پونڈ کمیت کا ایک گولہ ایک پونڈ کمیت کے ساکن گولے سے سیدھا ٹکراتا ہے۔ اگر ٹکر سے پہلے بڑے گولے کی رفتار وہی ہو جو ٹکر کے بعد چھوٹے گولے کی ہے تو لچک کی قدر معلوم کرو۔

(۹) م کمیت کا گولہ م، کمیت کے گولے سے سیدھا ٹکراتا ہے۔ م کی رفتار ٹکر کے بعد اس کی پہلی رفتار کا

$\frac{۳}{۵}$ ہو جاتی ہے اور لچک کی قدر $\frac{۳}{۵}$ ہے۔ گولوں کی کمیتوں کی نسبت معلوم کرو اور ٹکر کے بعد انکی رفتاروں کا بھی مقابلہ کرو۔

(۱۰) تین کروں کی کمیتیں ۲ پونڈ، ۶ پونڈ، ۱۲ پونڈ ہیں اور ان کی رفتاریں بالترتیب ۱۲ فٹ، ۴ فٹ ۲ فٹ فی ثانیہ ہیں۔ وہ تینوں ایک ہی سیدھ میں ترتیب بالا سے حرکت کرتے ہیں۔ اگر لچک کی قدر ایک ہو تو ثابت کرو کہ ان ٹکروں سے جو وقوع پذیر ہوں گی پہلے دو گولے ساکن ہو جائیں گے۔

(۱۱) ایک گولہ ۶۴ فٹ کی بلندی سے نیچے گرنے کو چھوڑ دیا جاتا ہے اور اسی وقت ایک مساوی گولہ زمین سے ۱۲۸ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے اوپر وار اس طرح پھینکا جاتا ہے کہ پہلے گولے سے سیدھا ٹکرائے اگر لچک کی قدر $\frac{۱}{۲}$ ہو تو دریافت کرو کہ ٹکر سے کتنی مدت کے بعد دونو گولے زمین پر پہنچیں گے۔

(۱۲) ایک بے لچک کرہ ایک دوسرے ساکن کرے سے ٹیڑھا ٹکراتا ہے۔ دوسرے کرے کی کمیت پہلے کرے کی کمیت سے دوچند ہے اور ٹکر کی سمت خط مرکزین سے °۳۰ کا زاویہ بناتی ہے۔ ثابت کرو کہ پہلے کرے کی سمت حرکت میں °۳۰ کی تبدیلی واقع ہوگی۔

(۱۳) دو مساوی گولے مساوی چالوں سے حرکت کرتے ہوئے

اس طرح ٹکراتے ہیں کہ بوقت تصادم ان کی حرکت کی سمتیں خط مرکزین سے ۳۰° اور ۶۰° کے زاوئے بناتی ہیں۔ اگر لچک کی قدر ایک ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد وہ ایسی متوازی سمتوں میں حرکت کریں گے جو خط مرکزین سے ۴۵° کا زاویہ بناتی ہیں۔

(۱۴) دو مساوی گولے مساوی رفتاروں سے حرکت کرتے ہوئے ٹکراتے ہیں اگر ان کی حرکت کی سمتیں بوقت تصادم خط مرکزین سے ۳۰° اور ۹۰° کے زاوئے بنائیں اور لچک کی قدر $\frac{1}{3}$ ہو تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد گولے متوازی سمتوں میں حرکت کرینگے اور ایک کی رفتار دوسرے کی رفتار سے دو چند ہوگی۔

(۱۵) دو مساوی گولے جن کی لچک کامل ہے اس طرح ٹکراتے ہیں کہ ان کی حرکت کی سمتیں ٹکر سے پہلے ایک دوسرے سے زاویہ قائمہ بناتی ہیں۔ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد بھی ان کی حرکت کی سمتوں کے درمیان زاویہ قائمہ ہوگا۔

(۱۶) ایک کرہ رفتار $\sqrt{3}$ ب سے حرکت کرتا ہوا ایک دوسرے مساوی کرے سے ٹکراتا ہے جو رفتار ب سے حرکت کررہا ہے - ان کی حرکت کی سمتیں حرکت سے پہلے خط مرکزین سے بالترتیب ۳۰° اور ۶۰° کے زاوئے بناتی ہیں۔ اگر لچک کی قدر ایک ہو تو ثابت

کرو کہ ٹکر کے بعد ان کی حرکت کی سمتیں خط مرکزین سے ۶۰° اور ۳۰° کے زاوئے بنائیں گی۔

(۱۷) ایک کرہ جس کی کمیت ۵ م ہے اور جو رفتار ۱۳ ب سے حرکت کر رہا ہے ایک دوسرے کرے سے ٹکراتا ہے جس کی کمیت م ہے اور رفتار ۵ ب ہے۔ ان کی حرکت کی سمتیں خط مرکزین سے بالترتیب زاوئے جب$^{-1}$ $\frac{۵}{۱۳}$ اور جب$^{-1}$ $\frac{۳}{۵}$ بناتی ہیں۔ اگر لچک کی قدر $\frac{۱}{۲}$ ہو تو ٹکر کے بعد ان کی رفتاریں اور حرکت کی سمتیں دریافت کرو۔

۱۲۶۔ دورانِ تصادم میں دو لچکدار جسموں کا تعامل۔

جب دو لچکدار جسم ٹکراتے ہیں تو مدت تصادم دو حصوں میں تقسیم کی جا سکتی ہے۔ پہلے حصے میں جسم ایک دوسرے کو دباتے ہیں اور پچک جاتے ہیں اور دوسرے حصے میں پھر اپنی اصلی شکل اختیار کرتے ہیں۔

جسموں کا پچکنا تجربہ سے اس طرح ثابت ہو سکتا ہے۔ ایک فرش پر رنگدار پوڈر بچھادو پھر بلیرڈ کھیلنے کا ایک گولہ اس فرش پر گراؤ۔ جس مقام پر گولہ فرش سے ٹکراتا ہے۔ وہاں سے پوڈر ہٹ جاتا ہے۔ لیکن پوڈر کے ہٹنے کی جگہ صرف ایک نقطہ نہیں ہوتا بلکہ ایک چھوٹا سا دائرہ ہوتا ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ دوران تصادم میں

ایک وقت ایسا تھا جبکہ گولے کا وہ حصہ جو فرش سے مس کرتا تھا ایک دائرہ تھا۔ اس سے صریحاً یہ نتیجہ نکلتا ہے کہ گولہ اس وقت پچکا ہوا تھا اور اس کی شکل بگڑی ہوئی تھی۔ بعد میں وہ اپنی اصلی شکل پر آگیا۔

تجربہ سے یہ بھی معلوم ہو گا کہ اگر گولے کو زیادہ بلندی سے گرائیں تو چھوٹا دائرہ بڑا ہو جاتا ہے۔ زیادہ بلندی سے گرنے کی وجہ سے گولے کی رفتار زیادہ ہو گی۔ اس سے ظاہر ہے کہ ٹکر کے وقت اگر رفتار زیادہ ہے تو بلیرڈ کے گولے کی شکل کا عارضی بگاڑ بھی زیادہ ہو گا

تصادم کا پہلا حصہ اس وقت تک رہتا ہے جبکہ ایک آن کے لئے دونو جسموں کی رفتار ایک ہو جاتی ہے۔ پھر ایسی قوتیں ظہور پذیر ہوتی ہیں جن کی وجہ سے جسم پھر اپنی اصلی شکل اختیار کرنے لگتے ہیں تصادم کے پہلے حصہ میں جسموں کے تعامل کو پچکنے کی قوت کہتے ہیں اور دوسرے حصہ میں تعامل پلٹنے کی قوت کہلاتا ہے۔

دوران تصادم میں دو جسموں کے درمیانی تعامل کی مقدار معلوم کرنے کا کوئی ذریعہ ہمارے پاس نہیں ہے۔ ہمیں صرف یہی معلوم ہے کہ اس میں بہت سی تبدیلی واقع

ہوتی ہے کیونکہ شروع میں اور اخیر میں یہہ تعامل صفر ہوتا ہے۔ اور دوران تصادم میں کسی آن میں اس کی قیمت بڑی بھی ضرور ہوتی ہے۔لیکن نیوٹن کے تیسرے قانون کے بموجب ہر آن میں جو قوت ایک جسم پر عمل کرتی ہے اتنی ہی قوت متقابل سمت میں دوسرے جسم پر عمل کرتی ہے۔ اس لئے قوتوں کے صدمے جسموں پر لازماً مساوی ہوں گے لیکن سمتوں میں متقابل ہوں گے۔

۱۲۷۔ یہہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ پچکنے اور پلٹنے کی قوتوں کی نسبت مقدار ل کے مساوی ہے جو لچک کی قدر کو تعبیر کرتی ہے۔

جیسا کہ دفعہ ۱۲۲ میں بیان ہوا فرض کرو کہ ایک کرہ دوسرے سے سیدھا ٹکراتا ہے۔ اور فرض کرو کہ ل، ب، بَ، ر، رَ، م، مَ حسب دفعہ ۱۲۲ مختلف مقداروں کو تعبیر کرتے ہیں۔

فرض کرو کہ پچک کے اختتام پر جسموں کی مشترکہ رفتار پ ہے تو پہلے کرے کے معیار حرکت کا

نقصان = م (ب - پ)

اور دوسرے کرے کے معیارِ حرکت کا اضافہ = مَ (پ - بَ)

پس اگر پچکنے کی قوت کے صدمے کو ک سے تعبیر کریں تو

$$\text{ک} = \text{م}\,(\text{ب} - \text{پ}) = \text{مَ}\,(\text{پ} - \text{بَ})$$

$$\therefore \frac{\text{ک}}{\text{م}} + \frac{\text{ک}}{\text{مَ}} = \text{ب} - \text{پ} + \text{پ} - \text{بَ} = \text{ب} - \text{بَ} \quad \ldots\ldots (۱)$$

پچکنے کے بعد کرے پلٹتے ہیں۔ پلٹنے میں پہلے کرے کے معیار حرکت کا نقصان $= \text{م}\,(\text{پ} - \text{ل})$

اور دوسرے کرے کے معیار حرکت کا اضافہ $= \text{مَ}\,(\text{لَ} - \text{پ})$

پس اگر پلٹنے کی قوت کے صدمے کو ٹ سے تعبیر کریں تو

$$\text{ٹ} = \text{م}\,(\text{پ} - \text{ل}) = \text{مَ}\,(\text{لَ} - \text{پ})$$

$$\therefore \frac{\text{ٹ}}{\text{م}} + \frac{\text{ٹ}}{\text{مَ}} = \text{پ} - \text{ل} + \text{لَ} - \text{پ} = \text{لَ} - \text{ل} \quad \ldots\ldots (۲)$$

$\therefore$ (۱) اور (۲) سے

$$\frac{\text{ٹ}}{\text{ک}} = \frac{\text{لَ} - \text{ل}}{\text{ب} - \text{بَ}}$$

یعنی $\dfrac{\text{پلٹنے کی قوت کا صدمہ}}{\text{پچکنے کی قوت کا صدمہ}} = \dfrac{\text{عماد کی سمت میں رفتار تباعد}}{\text{عماد کی سمت میں رفتار تقارب}} = \text{ل}$

$$\therefore \text{ٹ} = \text{ل}\,\text{ک}$$

۱۲۸۔ تصادم سے توانائی بالفعل کا نقصان۔ دو کرے جن کی کمیتیں اور رفتاریں معلوم ہیں ٹکراتے ہیں۔ ثابت کرو کہ توانائی بالفعل کا نقصان ہوتا ہے اور اس نقصان کی مقدار بھی معلوم کرو۔

اول ۔ فرض کرو کہ ٹکر سیدھی ہے ۔ دفعہ ۱۲۲ کا طریق کتابت استعمال کرنے سے

$$م ر + مَ رَ = م ب + مَ بَ \quad \ldots\ldots\ldots (۱)$$

$$رَ - ر = ل (ب - بَ) \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۲) کے مربعے کو م مَ سے ضرب دیکر (۱) کے مربعے میں جمع کرنے سے

$$(م^۲ + م مَ) ر^۲ + (مَ^۲ + م مَ) رَ^۲ = (م ب + مَ بَ)^۲ + ل^۲ م مَ (ب - بَ)^۲$$

یعنی $(م + مَ)(م ر^۲ + مَ رَ^۲)$

$$= (م ب + مَ بَ)^۲ + م مَ (ب - بَ)^۲ - (۱ - ل^۲) م مَ (ب - بَ)^۲$$

$$= (م + مَ)(م ب^۲ + مَ بَ^۲) - (۱ - ل^۲) م مَ (ب - بَ)^۲$$

$$\therefore \tfrac{۱}{۲} م ر^۲ + \tfrac{۱}{۲} مَ رَ^۲ = \tfrac{۱}{۲} م ب^۲ + \tfrac{۱}{۲} مَ بَ^۲ - \frac{۱ - ل^۲}{۲} \frac{م مَ}{م + مَ} (ب - بَ)^۲$$

پس ٹکر کے بعد توانائی بالفعل = ٹکر سے پہلے توانائی بالفعل $- \dfrac{۱ - ل^۲}{۲} \dfrac{م مَ}{م + مَ} (ب - بَ)^۲$

اس لئے توانائی بالفعل کا نقصان $= \dfrac{۱ - ل^۲}{۲} \dfrac{م مَ}{م + مَ} (ب - بَ)^۲$

اور یہہ نقصان صفر نہیں ہو سکتا جب تک کہ ل ایک کے مساوی نہ ہو یعنی جب تک کہ جسم کامل طور پر لچکدار نہ ہوں ۔

دوم ۔ فرض کرو کہ ٹکر ٹیڑھی ہے ۔ دفعہ ۱۲۴ کا

طریق کتابت استعمال کرنے سے حسب عمل صورت اول بالا

$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ر}^2\,\text{جم}^2\,\text{طہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{مَ}\,\text{رَ}^2\,\text{جم}^2\,\text{فہ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ب}^2\,\text{جم}^2\,\text{عہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{مَ}\,\text{بَ}^2\,\text{جم}^2\,\text{بہ}$$
$$- \frac{1-\text{ل}^2}{2}\,\frac{\text{م}\,\text{مَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\left(\text{ب جم عہ} - \text{بَ جم بہ}\right)^2 \quad \ldots\ldots(3)$$

اور چونکہ $\text{ر جب طہ} = \text{ب جب عہ}$

اور $\text{رَ جب فہ} = \text{بَ جب بہ}$

اس لئے
$$\tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ر}^2\,\text{جب}^2\,\text{طہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{مَ}\,\text{رَ}^2\,\text{جب}^2\,\text{فہ}$$
$$= \tfrac{1}{2}\,\text{م}\,\text{ب}^2\,\text{جب}^2\,\text{عہ} + \tfrac{1}{2}\,\text{مَ}\,\text{بَ}^2\,\text{جب}^2\,\text{بہ} \quad \ldots\ldots(4)$$

(۳) اور (۴) کو جمع کرنے سے

ٹکر کے بعد توانائی بالفعل

$$= \text{ٹکر سے پہلے توانائی بالفعل} - \frac{1-\text{ل}^2}{2}\,\frac{\text{م}\,\text{مَ}}{\text{م}+\text{مَ}}\left(\text{ب جم عہ} - \text{بَ جم بہ}\right)^2$$

اس سے ظاہر ہے کہ اگر لچک کی قدر ایک نہ ہو تو ہر ایک ٹکر کی صورت میں توانائی بالفعل کا کچھ نقصان ضرور ہوتا ہے یا یوں کہو کہ توانائی بالفعل کے ایک حصہ کی صورت بدل جاتی ہے۔

یہہ توانائی بالفعل جو دیکھنے میں نابود ہو جاتی ہے صورت بدل کر سالمی توانائی بن جاتی ہے اور زیادہ تر حرارت کی شکل میں نمودار ہوتی ہے۔

نتیجہ صریح - فرض کرو کہ مضروب شے ساکن ہے جیسے کہ ہتھوڑے کی چوٹ کیل پر پڑتی ہے - اس صورت میں
ب َ = ۰ اور ل = ۰
اس لئے صورت اول کے نتیجہ کے ذریعہ

$$\text{نابود شدہ یا متبدلہ توانائی} = \frac{۱}{۲}\,\frac{م\,مَ}{م + مَ}\,ب^۲$$

$$\therefore \frac{\text{چوٹ سے جیلی توانائی کا نقصان}}{\text{چوٹ سے پہلے جیلی توانائی}} = \frac{۱}{۲}\,\frac{م\,مَ}{م+مَ}\,ب^۲ \div \frac{۱}{۲}\,م\,ب^۲$$

$$= \frac{مَ}{م+مَ}$$

اس آخری جملہ کی قیمت کم ہو جاتی ہے اگر م اور مَ کی نسبت زیادہ ہو جائے - یعنی ہتھوڑے کی کمیت کیل کی کمیت کے مقابلے میں جس قدر زیادہ ہو گی اسی قدر کم جیلی توانائی کا نقصان ہو گا -

۱۲۹ - **مثال** (۱) ایک ذرہ بلندی ی سے ایک ثابت افقی سطح پر گرتا ہے - اگر لچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ اچھلنا موقوف ہونے تک کل فاصلہ جو ذرے نے طے کیا وہ $\frac{۱ + ل^۲}{۱ - ل^۲}$ ی ہے اور کل وقت جو اس میں صرف ہوا وہ $\sqrt{\frac{۲ ی}{ج}} \times \frac{۱ + ل}{۱ - ل}$ ہے -

فرض کرو کہ جب ذرہ پہلی دفعہ سطح سے ٹکراتا ہے اس کی رفتار ب ہے اس لئے $\text{ب}^2 = ۲\ \text{ج ی}$

بموجب دفعہ ۱۲۱ نتیجہ صحیح (۱) ذرہ رفتار ل ب سے اچھلتا ہے - جب وہ دوسری دفعہ سطح سے ٹکراتا ہے اس کی رفتار ل ب ہوگی - دوسری دفعہ اچھلنے کے بعد رفتار $\text{ل}^2\ \text{ب}$ ہوگی -

اسی طرح تیسری، چوتھی .... دفعہ اچھلنے کے بعد رفتاریں
$\text{ل}^3\ \text{ب}$، $\text{ل}^4\ \text{ب}$ .... ہوں گی -

پہلی، دوسری، تیسری، .... دفعہ اچھلنے کے بعد ذرہ جن بلندیوں تک پہنچتا ہے وہ یہ ہیں

$$\frac{\text{ل}^2\ \text{ب}^2}{۲\ \text{ج}}،\quad \frac{(\text{ل}^2\ \text{ب})^2}{۲\ \text{ج}}،\quad \frac{(\text{ل}^3\ \text{ب})^2}{۲\ \text{ج}} \ldots\ldots$$

یعنی $\text{ل}^2\ \text{ی}$ ، $\text{ل}^4\ \text{ی}$ ، $\text{ل}^6\ \text{ی}$ ، ......

لہذا کل فاصلہ طے ہوا وہ

$$= \text{ی} + ۲(\text{ل}^2\ \text{ی} + \text{ل}^4\ \text{ی} + \text{ل}^6\ \text{ی} + \ldots\ldots \text{لا انتہا})$$

$$= \text{ی} + ۲\ \text{ی}\ \frac{\text{ل}^2}{۱-\text{ل}^2}$$ لا انتہا سلسلہ ہندسیہ جمع کرنے سے

$$= \frac{۱+\text{ل}^2}{۱-\text{ل}^2}\ \text{ی}$$

اب وقت کا حساب لگاؤ

پہلی دفعہ گرنے میں جو وقت صرف ہوا وہ $= \sqrt{\frac{۲\ \text{ی}}{\text{ج}}}$

ٹکروں کے بعد اوپر جانے میں جو وقت صرف ہوتے ہیں وہ وہی ہیں جو بوجہ جاذبہ ارض، رفتاروں ل ب، $\text{ل}^{2}\text{ب}$، $\text{ل}^{3}\text{ب}$، ...... کے معدوم ہونے میں صرف ہوں گے۔

اس لئے یہہ وقت یہہ ہیں

$$\frac{\text{ل ب}}{\text{ج}}\text{، }\frac{\text{ل}^{2}\text{ب}}{\text{ج}}\text{، }\frac{\text{ل}^{3}\text{ب}}{\text{ج}}\text{، }\dots\dots$$

$$\text{یعنی ل}\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\text{، ل}^{2}\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\text{، ل}^{3}\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\text{، }\dots\dots$$

لہذا کل وقت جو حرکت میں صرف ہوا وہ

$$=\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}+\text{۲}\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\left(\text{ل}+\text{ل}^{2}+\text{ل}^{3}+\dots\dots\text{لاانتہا}\right)$$

$$=\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\left[\text{۱}+\text{۲}\,\frac{\text{ل}}{\text{۱}-\text{ل}}\right]=\sqrt{\frac{\text{۲ ی}}{\text{ج}}}\;\frac{\text{۱}+\text{ل}}{\text{۱}-\text{ل}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ نظراً یہہ نتیجہ حاصل ہوا کہ ایک محدود وقت میں ٹکروں کی لاانتہا تعداد وقوع پذیر ہوتی ہے لیکن عملاً یہہ ہوتا ہے کہ چند بار اچھلنے کے بعد گولے کی رفتار معدوم ہو جاتی ہے۔ پہلی ٹکر کے بعد ذرہ جس بلندی تک جاتا ہے وہ $\text{ل}^{2}\text{ی}$ ہے یعنی جس بلندی سے گرا اس کا ل^{2} گنا۔

$$\therefore\ \text{ل}^{2}=\frac{\text{اچھلنے کی بلندی}}{\text{گرنے کی بلندی}}$$

بذریعہ بالا کسی دئے ہوئے گولے اور دئے ہوئے فرش کی صورت میں ل کی قیمت تجربہ سے باآسانی معلوم ہو سکتی ہے۔ کیونکہ اگر کسی موزوں بلندی سے گولہ گرایا جائے تو اسی طرح چند بار گرانے سے اچھلنے کی بلندی معلوم ہو جائے گی۔ تب $ل^۲$ کی قیمت خود بخود معلوم ہو گئی۔

مثال (۲) ایک چکنی افقی سطح کے ایک نقطہ سے ایک ذرہ رفتار ب سے افق سے زاویہ عہ بناتا ہوا پھینکا گیا ہے۔ اگر سطح اور ذرہ کے درمیان لچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ اچھلنا موقوف ہونے تک وہ

ذرہ فاصلہ $\frac{ب^۲ \text{ جب}۲\text{عہ}}{ج} \cdot \frac{}{۱-ل}$ طے کریگا۔

ابتدائی عمودی رفتار ب جب عہ ہے۔

حسب مثال بالا پہلی، دوسری، تیسری، .... بار اچھلنے کے بعد عمودی رفتاریں یہہ ہونگی

$ل \text{ ب جب عہ}،\ ل^۲ \text{ ب جب عہ}،\ ل^۳ \text{ ب جب عہ}،...$

اس لئے بموجب دفعہ ۱۰۵ پہلی اور دوسری ٹکر کے درمیان مدت

$$\frac{۲ ل \text{ ب جب عہ}}{ج}$$ ہو گی

اسی طرح باقی خطوط مرمی کے اوقات یہہ ہونگے

$$\frac{۲ ل^{۲} ب \text{ جب } عہ}{ج} ، \frac{۲ ل^{۳} ب \text{ جب } عہ}{ج} ، \ldots\ldots$$

اس لئے ذرے کا اچھلنا موقوف ہونے تک کل وقت جو صرف ہوگا وہ

$$= \frac{۲ ب \text{ جب } عہ}{ج} + \frac{۲ ل ب \text{ جب } عہ}{ج} + \frac{۲ ل^{۲} ب \text{ جب } عہ}{ج} + \ldots\ldots \text{ لاانتہا}$$

$$= \frac{۲ ب \text{ جب } عہ}{ج} \left[۱ + ل + ل^{۲} + \ldots\ldots \right]$$

$$= \frac{۲ ب \text{ جب } عہ}{ج} \cdot \frac{۱}{۱ - ل}$$

اس مدت کے دوران میں افقی رفتار نہیں بدلتی اور ہمیشہ ب جم عہ رہتی ہے
پس افقی فاصلہ طے شدہ

$$= \frac{۲ ب \text{ جب } عہ}{ج} \cdot \frac{۱}{۱ - ل} \times ب \text{ جم } عہ = \frac{ب^{۲} \text{ جب } ۲ عہ}{ج \, (۱ - ل)}$$

جب ذرے کا اچھلنا بالکل بند ہو جاتا ہے تو اس وقت وہ سطح پر یکساں رفتار ب جم عہ سے حرکت کرنے لگتا ہے۔

امثلہ نمبری (۲۲)

(۱) ایک لچکدار ذرہ اس طرح پھینکا گیا ہے کہ ایک

عمودی دیوار سے ٹکرا کر پھر اسی مقام پر واپس آجاتا ہے جہاں سے پھینکا گیا تھا۔ اگر زاویۂ رمی عہ ہو اور جس وقت ذرہ نقطہ رمی پر واپس پہنچتا ہے اس وقت اگر اس کی حرکت کی سمت افق سے زاویہ بہ بنائے تو ثابت کرو کہ مس عہ = ل مس بہ جہاں ل لچک کی قدر ہے۔

(۲) اگر ایک لچکدار کرہ ۱۶ فٹ کی بلندی سے ایک ثابت افقی میز پر گرے تو ثابت کرو کہ ۸ ثانیہ میں ۶۵ فٹ طے کرکے وہ ساکن ہو جائے گا (لچک کی قدر $\frac{۷}{۹}$ ہے)۔

(۳) ایک گولی ۴۸ فٹ کی بلندی سے ایک لچکدار افقی سطح پر گرتی ہے اگر لچک کی قدر $\frac{۱}{۲}$ ہو تو دریافت کرو کہ کتنا وقت گذرنے کے بعد اور کتنا فاصلہ طے کرکے گولی ساکن ہو گی؟

(۴) ایک ذرہ ایک افقی سطح کے ایک نقطے سے ۶۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے، افق سے °۳۰ کا زاویہ بنانے والی سمت میں، پھینکا گیا ہے۔
اگر لچک کی قدر $\frac{۳}{۴}$ ہو تو دریافت کرو کہ افقی سمت میں کتنا فاصلہ طے کرنے کے بعد ذرہ ساکن ہو گا اور اس میں کتنا وقت صرف ہو گا؟

(۵) ایک گولی سمت شاقولی میں ۲ ثانیہ گرکر ایک ایسی

سطح سے ٹکراتی ہے جس کا میلان افق سے ۳۰° ہے۔ اگر لچک کی قدر $\frac{۳}{۴}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۳ ثانیہ کے بعد گولی پھر سطح سے ٹکرائے گی۔

(۶) ایک گولی جس کی لچک کامل ہے ایک برج کی چوٹی سے گرتی ہے۔ جب یہہ بلندی کے نصف تک گر چکتی ہے تو ایک چکنے استوار پتھر سے ٹکراتی ہے جو افق سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہوا باہر کو نکلا ہوا ہے۔ دریافت کرو کہ گولی زمین پر کہاں جاکر لگیگی؟ (برج کی بلندی ی ہے)۔

(۷) ایک گولی ایک چکنی افقی سطح پر ایک دیوار سے ایک گز کے فاصلے پر پڑی ہے۔ ایک اور مساوی گولی ایک گز فی ثانیہ کی رفتار سے دیوار کی عمودی سمت میں حرکت کرتی ہوئی پہلی گولی سے ٹکراتی ہے۔ اگر گولیوں کے درمیان اور دیوار اور گولیوں کے درمیان لچک کی قدر $\frac{۱}{۳}$ ہو تو ثابت کرو کہ ۴، ۲ ثانیہ کے بعد گولیاں پھر ٹکرائیں گی۔ گولیوں کے قطر شمار کے قابل نہیں ہیں۔

(۸) دو مساوی گولیاں ا اور ب ایک چکنی افقی مدور نالی میں ایک قطر کے مقابل سروں پر پڑی ہیں۔ ا کو نالی میں حرکت دی جاتی ہے اور وقت و کے بعد یہہ گولی دوسری سے ٹکراتی ہے۔ ثابت کرو کہ

وقت $\frac{۲و}{ل}$ کے بعد گولیاں پھر ٹکرائیں گی۔ ل لچک کی قدر ہے۔

(۹) دو چکنی گولیاں جن کے قطر مساوی ہیں اور کمیتیں ۱۰م اور ۱۱م ہیں ایک مدور نالی میں ایک ہی مقام پر پڑی ہیں۔ ان کو مساوی رفتاروں سے متقابل سمتوں میں حرکت دی جاتی ہے۔ اگر لچک کی قدر $\frac{۳}{۴}$ ہو تو دریافت کرو کہ دوسری ٹکر کہاں ہو گی؟

(۱۰) کمیت م کا ایک کرہ کمیت ن کے ساکن کرے سے ٹیڑھا ٹکراتا ہے۔ اگر م = ل ن تو ثابت کرو کہ ٹکر کے بعد حرکت کی سمتیں ایک دوسرے سے زاویۂ قائمہ بنائیں گی۔ ل لچک کی قدر ہے۔

(۱۱) ایک کرہ ایک دوسرے ساکن کرے سے جسکی کمیت مساوی ہے ٹکراتا ہے۔ اگر ٹکر کے بعد حرکت کی سمتیں پہلے کرے کی پہلی سمت حرکت سے ۳۰° کے زاوئے بنائیں تو ثابت کرو کہ لچک کی قدر $\frac{۱}{۳}$ ہے۔

(۱۲) ایک گولہ ایک دوسرے مساوی گولے سے جو مساوی رفتار سے پہلے کی سمت حرکت کی عمودی سمت میں حرکت کرتا ہے، ٹکراتا ہے۔ بوقت تصادم خط مرکزین دوسرے گولے کی سمت حرکت سے زاویہ قائمہ بناتا ہے۔ اگر لچک کی قدر ل ہو تو ثابت کرو کہ دوسرے گولے کی سمت حرکت کی تبدیلی زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۱+ل}{۲}$ کے

مساوی ہو گی۔

(۱۳) دو مساوی چکنے کرے متوازی متقابل سمتوں میں مساوی رفتاروں سے حرکت کرتے ہوئے ٹکراتے ہیں۔ یعنی ان میں اوجھڑ ہوتی ہے۔

اگر ان کی حرکت کی سمتوں کا میلان خط مرکزین سے $مس^{-1}\sqrt{ل}$ ہو جہاں ل لچک کی قدر ہے تو ثابت کرو کہ ان کی حرکت کی سمتوں میں تبدیلی بقدر ایک زاویہ قائمہ کے ہو گی۔

(۱۴) دو مساوی کرے ایک میز پر ایک دوسرے سے مس کرتے ہوئے پڑے ہیں ایک تیسرا کرہ دونوں سے ایک ساتھ ایک ہی وقت ٹکراتا ہے اور ٹکر کے بعد خود ساکن ہو جاتا ہے تو ثابت کرو کہ لچک کی قدر $\frac{۲}{۳}$ ہے۔

(۱۵) پانچ گولے ایک خط مستقیم میں پڑے ہیں اور ان کی کمیتیں سلسلہ ہندسیہ میں ہیں جس کی نسبت ۲ ہے اور ان کی لچک کی قدر $\frac{۲}{۳}$ ہے۔ اگر پہلا گولہ دوسرے کی طرف رفتار ب سے حرکت دیا جائے تو ثابت کرو کہ یکے بعد دیگرے ٹکریں ہونے سے پانچویں گولے کی رفتار $\left(\frac{۵}{۹}\right)^{۴}$ ب ہو گی۔

(۱۶) ایک گولہ جس کی لچک کی قدر معلوم ہے حالت سکون سے ایک مائل سطح کی چوٹی سے نیچے کی طرف

پھسلتا ہے۔ سطح مائل کا طول ط ہے اور اس کا میلان افق سے عہ ہے۔ سطح مائل کے پایہ کے ساتھ ملی ہوئی ایک ثابت افقی سطح ہے جس سے گولہ اگر ٹکراتا ہے۔ اس افقی سطح پر گولے کا ٹپہ معلوم کرو۔

(۱۷) ایک وزنی لچکدار گولہ ن فٹ کی بلندی سے گرتا ہے اور ایک سطح سے ٹکراتا ہے جو افق سے بزاویہ ۶۰° مائل ہے۔ پہلے دو مقاموں کا درمیانی فاصلہ دریافت کرو جہاں گولہ سطح سے ٹکراتا ہے۔

(۱۸) ایک بے لچک گولہ ایک چکنی افقی سطح پر ۱۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے پھسلتا ہوا ایک چکنی افقی ریل سے ٹکراتا ہے جو گولے کی سمت حرکت کے ساتھ زاویہ قائمہ بناتی ہے۔ اگر سطح پر ریل کی بلندی گولے کے نصف قطر کا نصف ہو تو ثابت کرو کہ جو قطع مکافی کہ گولہ مرتسم کریگا اس کا وتر خاص ایک فٹ ہوگا۔

(۱۹) ایک ذرہ ایک چکنی افقی سطح کے ایک نقطے ا سے اس طرح پھینکا جاتا ہے کہ ایک ناقص لچک والی عمودی سطح سے ٹکرا کر ایک نقطہ معلومہ ب میں سے گذرے۔ سمت رمی معلوم کرنے کے لئے عمل ہندسی بتاؤ۔

(۲۰) ایک چکنی گول میز کا کنارہ ہر طرف سے اونچا ہے اور میز کی سطح پر عمود ہے۔ اگر ایک گولی کو جس کی

لچک کی قدر ل ہے میز کے کنارے کے ایک نقطے سے میز پر اس طرح حرکت دی جائے کہ اس کی سمتِ حرکت اس نقطے میں سے گذرنے والے نصف قطر سے زاویہ $مس^{-1}\sqrt{\frac{ل^{۳}}{۱+ل+ل^{۲}}}$ بنائے تو ثابت کرو کہ گولی دو دفعہ کنارے سے ٹکرا کر نقطہ رمی پر واپس آجائے گی۔

یہہ بھی ثابت کرو کہ جب گولی دو ٹکروں کے بعد نقطہ رمی پر واپس آئے گی تو اس وقت کی رفتار کی نسبت پہلی رفتار سے $ل^{\frac{۳}{۲}}$: ۱ ہوگی۔

اگر سمت رمی نصف قطر سے زاویہ $مس^{-1} ل^{\frac{۳}{۲}}$ بنائے تو ثابت کرو کہ گولی تین ٹکروں کے بعد نقطہ رمی پر واپس آئے گی۔

(۲۱) دو لچکدار ذرے ایک چکنی افقی سطح کے ایک نقطے سے ایک ہی وقت پھینکے گئے ہیں۔ ثابت کرو کہ ان کا مرکز ثقل ایک ہی قطع مکافی کی مختلف قوسیں مختلف وضعوں میں مرتسم کرے گا۔

باب نہم

رسم الطریق اور عمادی اسراع

۱۳۰- اس باب میں ہم ایک ذرے کی ایسی حرکت پر غور کریں گے جبکہ وہ ایک خط منحنی میں حرکت کرتا ہے۔ تمہیداً ہم اس امر کی تشریح کرینگے کہ ذرہ خواہ کسی طرح حرکت کرے اس کی رفتار، سمتِ حرکت، اور اس کا اسراع ایک دوسرے منحنی کے ذریعہ مرتسم ہو سکتے ہیں۔

۱۳۱- **رسم الطریق- تعریف-** اگر ایک ذرہ کسی طریق پر کسی طرح حرکت کرے اور اگر نقطہ و سے جو فضا میں ثابت ہے ایک خط مستقیم وق ایسا کھینچا جائے جو طریق کے نقطہ ط پر کی رفتار کے متوازی اور متناسب ہو تو جو منحنی اس خط مستقیم کے سرے ق سے مرتسم ہوگا وہ ذرے کے راستے کا رسم الطریق

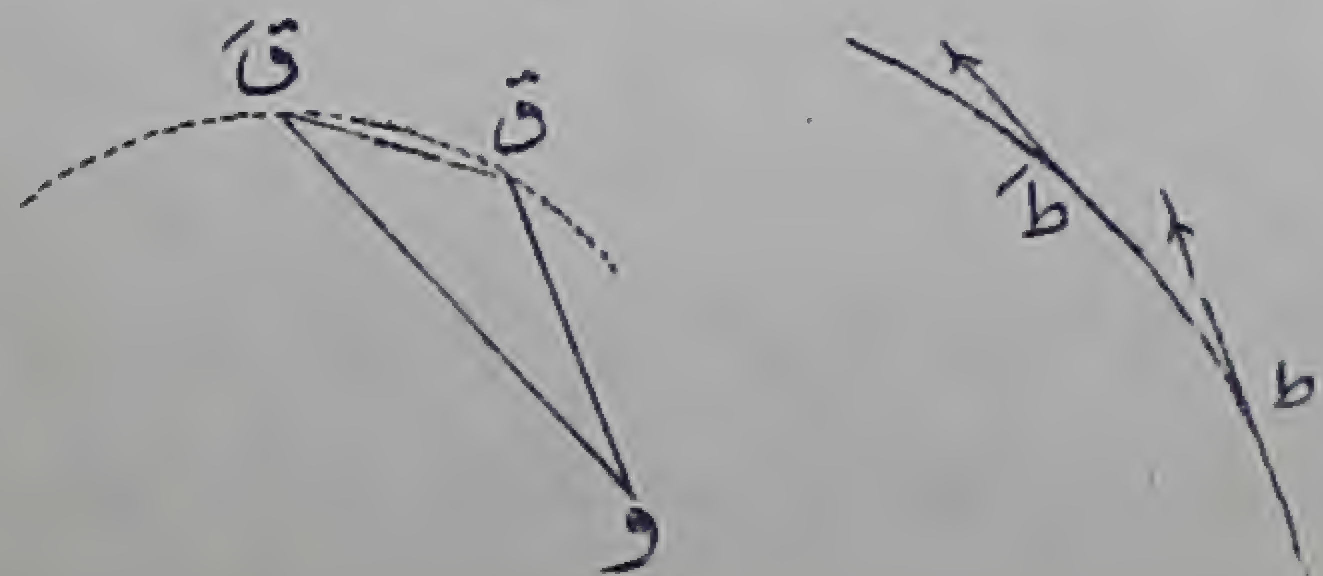
کہلاتا ہے۔

اس کی وجہ تسمیہ یہہ ہے کہ یہہ منحنی ذرے کی رفتار اور اسراع کی تصویر نظر کے سامنے کھینچ دیتا ہے۔

۱۳۲۔ اگر ایک متحرک نقطے ط کے راستے کا رسم الطریق بنا لیا جائے تو رسم الطریق کے متماثل نقطے ق کی جو رفتار رسم الطریق میں ہوگی۔ وہ مقدار اور سمت میں وہی ہوگی جو ط کا اسراع ط کے طریق میں ہے۔

فرض کرو کہ ط کے طریق پر دو نقطے ط اور طَ ایک دوسرے کے قریب ہیں۔ دو خط و ق اور و قَ ایسے کھینچو جو ط اور طَ پر کے مماسوں کے متوازی ہوں اور انہی نقطوں پر کی رفتاروں کے متناسب ہوں تو ق اور قَ رسم الطریق پر دو نقطے ہوں گے جو ایک دوسرے کے قریب واقع ہیں۔

جس مدت میں ذرہ ط سے حرکت کرکے طَ پر پہنچتا ہے اس مدت میں اس کی رفتار و ق سے تبدیل ہو کر و قَ ہو جاتی ہے۔ اس لئے بموجب دفعہ ۲۷ رفتار کی تبدیلی ق قَ سے تعبیر ہوتی ہے۔



اب فرض کرو کہ طؔ ایک ایسا نقطہ ہے جو ط کے لا انتہا قریب ہے۔ اسی صورت میں ق قؔ رسم الطریق کی ایک نہایت ہی چھوٹی قوس ہوگی۔

اگر متحرک نقطے نے فاصلہ ططؔ وقت ت میں طے کیا ہے تو بموجب دفعہ ۲۸

ط کا اسراع = رفتار کی تبدیلی وقت ت میں / ت

= ققؔ / ت = ق کی رفتار رسم الطریق میں یعنی

ط کا اسراع اس کے طریق میں وہی مقدار اور سمت رکھتا ہے جو رسم الطریق میں ق کی رفتار کی مقدار اور سمت ہے۔

۱۳۲۔ **مثالیں** (۱) اگر ایک نقطہ ایک دائرے پر یکساں چال سے چلے تو اس کا رسم الطریق ایک اور دائرہ ہوگا جس پر متماثل نقطہ یکساں چال سے حرکت کرے گا۔ کیونکہ اس صورت میں ط کی رفتار نہیں بدلتی اس لئے خط وق کا طول نہیں بدلتا۔

اس لئے ق ایک ایسے دائرے پر واقع ہے جس کا مرکز و ہے۔

اور چونکہ ط کی حرکت اپنے دائرے میں یکساں ہے اس لئے ط پر کے مماس کی گردش کے زاوئے مساوی

ہوں گے۔
لہذا خط و ق مساوی اوقات میں مساوی زاویوں میں گردش کریگا۔
(۲) اگر ایک نقطہ یکساں اسراع سے خط مستقیم میں حرکت کرے تو اس کا رسم الطریق ایک خط مستقیم ہوگا جس پر متماثل نقطہ یکساں رفتار سے چلیگا۔ کیونکہ اس صورت میں خط و ق ہمیشہ ایک ہی مستقل سمت میں کھینچا جائے گا اور ق کی رفتار جو مقدار میں ط کے یکساں اسراع کے مساوی ہے یکساں ہو گی۔

عمادی اسراع

۱۳۴۔ حرکت کے پہلے قانون سے ہمیں یہ معلوم ہو چکا ہے کہ اگر کوئی ذرہ ایک دفعہ حرکت میں آجائے اور اس پر کوئی قوت عمل نہ کرے تو وہ ہمیشہ یکساں رفتار سے خط مستقیم میں حرکت کرتا رہے گا۔ اس لئے خط منحنی میں اس کی حرکت ممکن نہیں ہے جب تک کہ کوئی بیرونی قوت اس پر عمل نہ کرے۔ اگر ذرہ خط منحنی پر یکساں چال سے حرکت کرے تو اس کے طریق کے مماس کی سمت میں کوئی قوت نہیں ہو سکتی ورنہ اس کی چال میں تبدیلی واقع ہو۔ لہذا اس پر جو قوت

عمل کرتی ہے وہ اس کے طریق کے عماد کی سمت میں ہے۔ اگر اس کی چال یکساں نہ ہو تو مماس کی سمت میں عمل کرنے والی قوت بھی ہو گی۔

دفعات ذیل میں ہم ایک ایسے ذرے کے عمادی اسراع پر بحث کرینگے جو ایک دائرے میں مستقل چال سے حرکت کرتا ہے۔

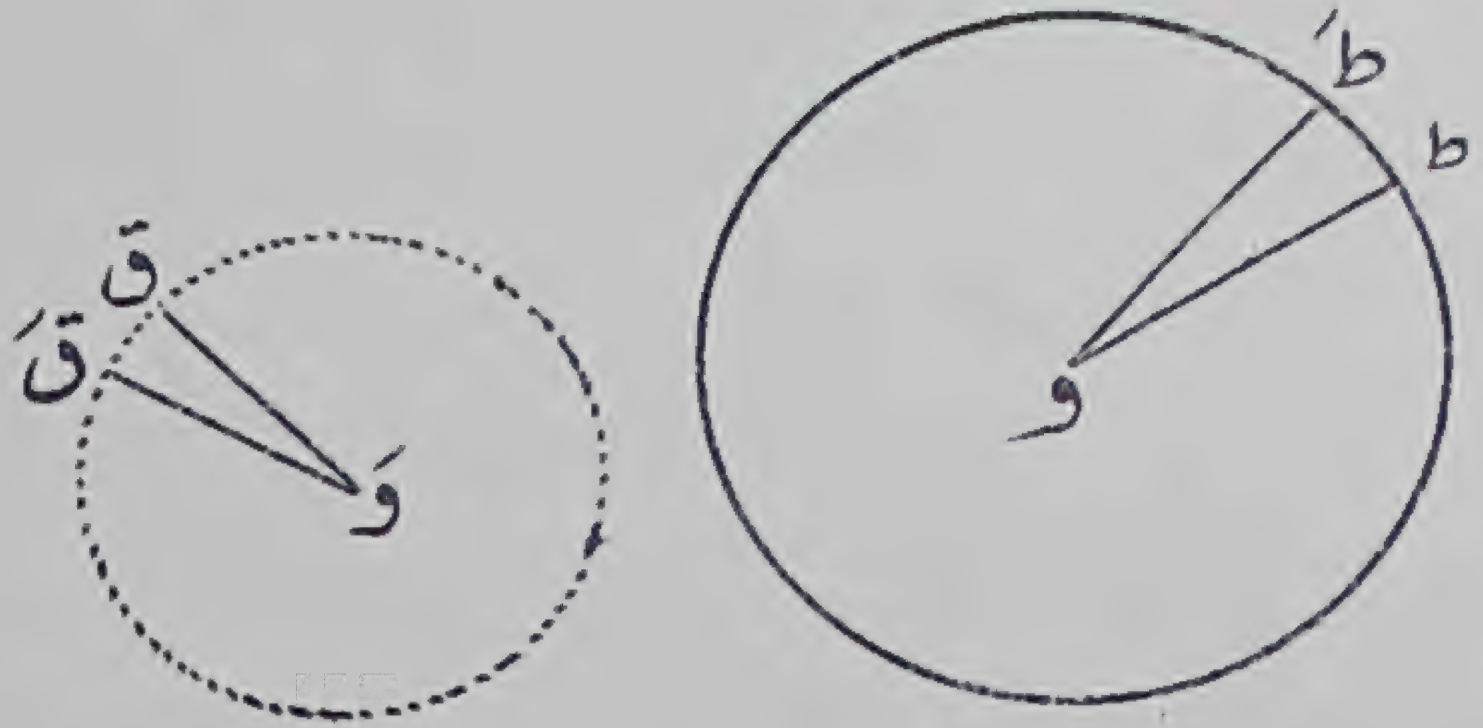
۱۳۵- مسئلہ۔ اگر ایک ذرہ ایک دائرے میں جس کا نصف قطر ن ہے یکساں چال ل سے حرکت کرے تو ثابت کرو کہ اس کا اسراع مقدار میں $\frac{ل^2}{ن}$ ہے اور اس اسراع کی سمت مرکز کی طرف ہے۔

فرض کرو کہ متحرک ذرے کے دو متصل مقام ط اور طَ ہیں اور ان کے مماثل نقطے رسم الطریق پر ق اور قَ ہیں۔ چونکہ ط کی چال یکساں ہے اس لئے خط وَق طول میں یکساں ہے پس ق ایک ایسے دائرے میں حرکت کرتا ہے جس کا نصف قطر ل ہے۔ ساتھ ہی یہہ بھی ظاہر ہے کہ زاویہ ق وَ قَ مساوی ہے اس زاوئے کے جو ط اور طَ پر کے مماسوں کے درمیان ہے یعنی زاویہ ط و طَ کے مساوی ہے۔

اس لئے قوس ق قَ : قوس ط طَ :: وَق : وط :: ل : ن

اور ساتھ ہی ق اور ط کی رفتاریں، قوسوں ق قَ

اور ط طَ کے متناسب ہیں



لہذا

ق کی رفتار رسم الطریق میں : ر :: ر : ن

∴ ق کی رفتار = $\frac{ر^{2}}{ن}$

لیکن ق کی سمت حرکت وَقَ پر عمود ہے اس لئے ط و کے متوازی ہے۔ ساتھ ہی ط کا اسراع ق کی رفتار کے مساوی ہے (دفعہ ۱۳۲)

پس ط کا اسراع $\frac{ر^{2}}{ن}$ ہے اور اس کی سمت ط و ہے۔

[اگر چال ر مستقل نہ ہو بلکہ متبدل ہو تو بھی ثابت ہو سکتا ہے (ایلی منٹری ڈائی نیمکس دفعہ ۱۵۷) کہ عمادی اسراع $\frac{ر^{2}}{ن}$ ہے]

نتیجہ صحیح (۱) اگر ذرے کی زاویئی رفتار مرکز و کے گرد ھ ہو تو ر = ن ھ ا عمادی اسراع = $ھ^{2}$ ن

نتیجہ صریح (۲) عمادی اسراع پیدا کرنے کے لئے جو قوت مطلوب ہوتی ہے وہ م $\frac{ر^2}{ن}$ ہے جہاں م ذرے کی کمیت ہے۔

۱۳۶۔ دفعہ گذشتہ کا اہم مسئلہ رسم الطریق کے استعمال کے بغیر بھی ثابت ہو سکتا ہے۔ ذیل میں دوسرا ثبوت درج کیا جاتا ہے۔

فرض کرو کہ دائرے کے نقطے ط کے بہت قریب ایک نقطہ طَ ہے۔ اور فرض کرو کہ ط پر مماس ط لا ہے اور طَ پر مماس ط ت کھینچا گیا ہے جو ط لا کو ت پر ملتا ہے۔ ط اور طَ کو دائرے کے مرکز و سے ملاؤ۔ (شکل صفحہ ۳۱۴ پر دیکھو)

چونکہ ط اور طَ پر کے زاوئے قائمے ہیں اس لئے نقاط و، ط، ت، طَ ایک دائرے پر واقع ہیں۔ اس لئے زاویہ طَ ت لا = دو قائمے ۔ زاویہ طَ ت ط

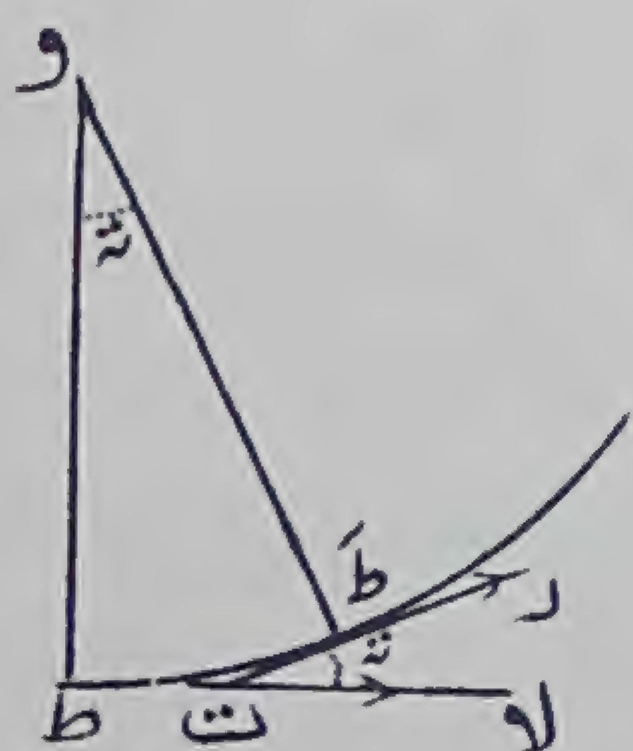
= زاویہ ط و طَ = تہ (فرض کرو)

فرض کرو کہ دائرے پر ذرے کی چال ر ہے اور فرض کرو کہ قوس ط طَ وقت ک میں طے ہوتی ہے۔ وقت ک میں ط و کے متوازی رفتار ر جب تہ پیدا ہوتی ہے اس لئے ط و کی سمت میں اسراع = $\frac{ر \text{ جب } تہ}{ک}$ جبکہ ک بہت چھوٹا ہو اور لہذا تہ بھی

بہت چھوٹا ہو۔

یعنی ط و کی سمت میں اسراع $= \dfrac{\text{ر تہ}}{\text{ک}} = \dfrac{\text{ر}}{\text{ک}} \times \dfrac{\text{قوس ط طَ}}{\text{و ط}}$

$$= \frac{\text{ر}}{\text{ن}} \times \frac{\text{قوس ططَ}}{\text{ک}}$$



لیکن چونکہ دائرے میں چال ر ہے اس لئے

$$\frac{\text{قوس ط طَ}}{\text{ک}} = \text{ر}$$

پس اسراع مطلوب $= \dfrac{\text{ر}^2}{\text{ن}}$

بموجب دفعہ (۱۳۵) نتیجہ صریح (۱) یہہ اسراع ن ھ^2 کے مساوی ہے جہاں ھ زاویئی رفتار ہے۔

یہہ بھی ظاہر ہے کہ مرکز کی سمت میں قوت م $\dfrac{\text{ر}^2}{\text{ن}}$ ہو گی

۱۳۷۔ جس قوت کا دفعات گذشتہ میں ذکر ہوا اور جو عمادی اسراع پیدا کرنے کے لئے مطلوب ہے وہ کئی طرح سے پیدا ہو سکتی ہے۔

مثلاً جسم کو رسی کے ذریعہ سے ایک ثابت نقطے سے باندھ دیا جائے۔ خواہ رسی ایسی ہو جس کا طول کھینچنے سے بڑھ سکتا ہے یا ایسی ہو جس کا طول کھینچنے سے نہیں بڑھ سکتا۔

یہہ قوت کسی مادی منحنی کے دباؤ سے بھی پیدا ہوسکتی ہے جس کی وجہ سے جسم منحنی پر چلایا جائے۔ مثلاً ایک ریل گاڑی کو ریلوے لائن کے کسی منحنی حصے پر اس دباؤ کے ذریعہ سے چلایا جا سکتا ہے جو ریلیں اس کے پہیوں پر ڈالتی ہیں۔

یہہ قوت، قوت جاذبہ کی صورت بھی اختیار کرسکتی ہے جیسا کہ سورج اور زمین کے درمیان ہے۔ اس کی وجہ سے زمین سورج کے گرد ایک منحنی میں حرکت کرتی ہے۔

۱۳۸۔ اگر ایک شخص ایک رسی کے ایک سرے سے ایک جسم باندھ دے اور دوسرا سرا ہاتھ میں لیکر جسم کو رسی کے ذریعہ سے ایک دائرے میں گھمائے تو رسی کا تناؤ وہ قوت ہے جوکہ جسم کو مطلوبہ اسراع دینے کے لئے ضروری ہے۔ لیکن حرکت کے تیسرے قانون کے بموجب رسی اس شخص کے ہاتھ کو ایک ایسی قوت سے کھینچتی ہے جو اس قوت کے مساوی اور متقابل ہے جو رسی کے ذریعہ سے جسم پر عمل

کرتی ہے ۔

یہہ دونو قوتیں عمل اور جوابِ عمل ہیں جن کا ذکر نیوٹن نے کیا ہے ۔ اس شخص کو یہہ معلوم ہوتا ہے کہ جسم اس کے ہاتھ سے چھٹنے کی کوشش کررہا ہے ۔ اس وجہ سے جو قوت جسم کو عمادی اسراع دینے کے لئے ضروری ہے اس کے مساوی اور متقابل قوت کو جسم کی مرکز گریز قوت کہتے ہیں۔ لیکن اس اصطلاح سے کچھ غلط فہمی ممکن ہے ۔ کیونکہ اس اصطلاح سے یہہ ظاہر ہوتا ہے کہ یہہ قوت جسم کی ذاتی قوت ہے حالانکہ ایسا نہیں ہے ۔ بلکہ یہہ ایک بیرونی قوت کی وجہ سے ہے جو جسم پر عمل کرتی ہے۔ اس اصطلاح کا مفہوم یہہ بھی معلوم ہوتا ہے کہ جسم منحنی کے مرکز سے باہر کی طرف جانے کی کوشش کرتا ہے اور اس کو ایسا کرنے سے روکا جاتا ہے ۔ حالانکہ امر واقعہ یہہ نہیں ہے ۔ کیونکہ جسم کو اگر روکا نہ جائے تو وہ منحنی کے مماس کی سمت میں حرکت کرے گا۔ یعنی جسم کی حرکت سمت ط ل میں ہوگی (دیکھو شکل دفعہ ۱۳۶)۔ سمت وط میں حرکت کرنے کا جسم کا میلان نہیں ہے ۔

" مرکز جو قوت " ایک ایسی اصطلاح ہے جس میں غلط فہمی کم ہوگی ۔

ہم دونو اصطلاحوں سے احتراز کرینگے - لیکن جب یہہ اصطلاحیں طالب علم کے سامنے آئیں تو وہ یہہ سمجھ لے کہ دوسری اصطلاح سے وہ قوت مراد ہے جو جسم کو اس کے طریق میں عمادی اسراع دینے کیلئے ضروری ہے اور پہلی اصطلاح سے قوت مذکورہ بالاکے مساوی اور متقابل قوت مفہوم ہے -

یہہ آخر کی قوت جو مرکز گریز قوت کہلاتی ہے دراصل اس جسم پر عمل کرتی ہے جو متحرک جسم کو اس کے طریق پر چلاتا ہے -

مثلاً اگر ہم ریل گاڑی کی مثال لیں جو ایک منحنی پر جا رہی ہے تو مرکز گریز قوت ریلوں پر عمل کرتی ہے اور اگر ہم اس جسم کی مثال لیں جس کو ایک شخص رسی کے ذریعہ گھما رہا ہے تو اس صورت میں مرکز گریز قوت اس شخص کے ہاتھ پر عمل کرتی ہے -

۱۳۹ - مثال (۱) ۳ پونڈ کمیت کا ایک ذرہ، جو ایک چکنی میز پر ۵ فٹ لمبی رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے، ۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کررہا ہے - رسی کا تناؤ معلوم کرو -

یہاں ر = ۴ اور ن = ۵

اسلئے بموجب دفعہ ۱۳۵، ثابت نقطے کی طرف اسراع

$$= \frac{ر^۲}{ن} = \frac{۱۶}{۵}$$

پس رسی کا تناؤ $= ۳ \times \frac{۱۶}{۵} = \frac{۴۸}{۵}$ پونڈل

$= \frac{۴۸}{۳۲ \times ۵}$ پونڈ وزن

$= \frac{۳}{۱۰}$ پونڈ وزن

مثال (۲) ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ایک افقی میز پر حرکت کرتا ہے اور ایک رسی کے ذریعہ اس میز پر ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ رسی کا طول ط ہے۔ اگر رسی زیادہ سے زیادہ ن پونڈ کا وزن سہار سکے تو دریافت کرو کہ رسی ٹوٹنے کے بغیر ذرہ ایک ثانیہ میں زیادہ سے زیادہ کتنی گردشیں کر سکتا ہے؟

فرض کرو کہ مطلوبہ گردشوں کی تعداد ت ہے تو ذرے کی رفتار ت × ۲ π ط ہو گی

اس لئے رسی کا تناؤ $=$ م $\times \frac{۴ \pi^۲ ت^۲ ط^۲}{ط}$ پونڈل

پس ن ج $= ۴$ م $\pi^۲$ ت^۲ ط

لہذا ت $= \frac{۱}{۲\pi} \left(\frac{ن ج}{م ط} \right)^{\frac{۱}{۲}}$

اگر گردشوں کی تعداد اس سے زیادہ ہو گی تو رسی کا تناؤ اس تناؤ سے بڑھ جائے گا جو کہ رسی سہار سکتی ہے یعنی رسی ٹوٹ جائے گی۔

امثلہ نمبری (۲۳)

(۱) ۳ فٹ لمبی رسی کا ایک سرا ایک چکنی افقی میز کے ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ اگر ۵ پونڈ کمیت کا ایک جسم رسی کے دوسرے سرے سے باندھکر ۶ فٹ فی ثانیہ کی یکساں رفتار سے میز پر گھمایا جائے تو رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

(۲) ایک رسی کا طول ۴ فٹ ہے اور وہ ۹ پونڈ وزن کو عین سہار سکتی ہے۔ ۸ پونڈ کمیت کا ایک جسم اس کے سرے سے باندھ دیا گیا ہے اور ایک افقی میز پر یکساں رفتار سے گردش کرتا ہے۔ رسی کا دوسرا سرا میز پر ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ دریافت کرو کہ رسی ٹوٹنے کے بغیر زیادہ سے زیادہ کتنی گردشیں فی منٹ ہو سکتی ہیں؟

(۳) ایک رسی جس کا طول ۵ فٹ ہے ۲۰ پونڈ وزن کو عین سہار سکتی ہے۔ اگر گردش کرنے والے جسم کی کمیت ۵ پونڈ ہو تو دریافت کرو کہ رسی ٹوٹنے کے بغیر ایک منٹ میں زیادہ سے زیادہ کتنی گردشیں ہو سکتی ہیں؟

(۴) اڑھائی فٹ لمبی رسی کا ایک سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے اور دوسرے سرے سے ایک پونڈ کمیت

کا جسم باندھکر ایک افقی دائرے میں گھمایا جاتا ہے جس کا مرکز ثابت نقطہ ہے۔ اگر اس گردش سے رسی کا تناؤ ۵ پونڈ وزن کے مساوی ہو تو ثابت کرو کہ رسی ایک منٹ میں تقریباً ۷۶ گردشیں کر رہی ہے۔

(۵) ایک رسی کا ایک سرا ثابت ہے اور دوسرے سرے سے ایک جسم بندھا ہے۔ رسی یکساں رفتار سے گردش کر رہی ہے۔ اگر رسی کا طول ۲ فٹ ہو اور اس کا تناؤ گردش کرنے والے جسم کے وزن سے ۹ گنا ہو تو جسم کی رفتار دریافت کرو۔

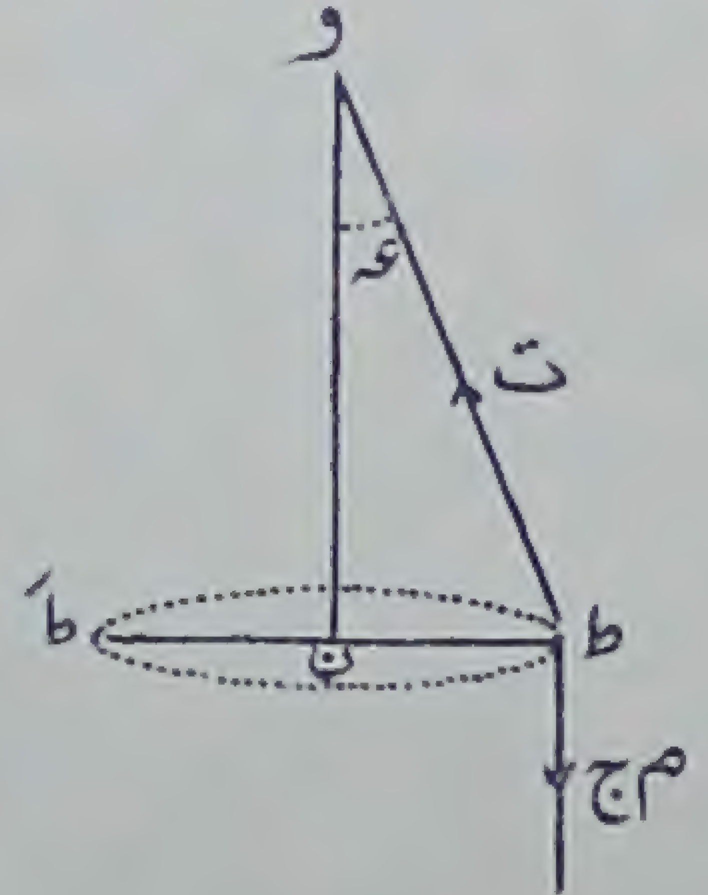
(۶) ایک رسی کا طول نصف میٹر ہے اور اس کے ایک سرے سے ۱۰ گرام کمیت کا ایک جسم باندھکر افقی سطح میں گھمایا جاتا ہے۔ اگر رسی کا تناؤ اسی قدر ہو جس قدر کہ ایک گرام کمیت کا جسم آزادانہ لٹکانے سے ہوتا ہے تو دریافت کرو کہ ایک منٹ میں کتنی گردشیں ہو رہی ہیں؟

(۷) ۱۰ ٹن کمیت کا ایک انجن تیس میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک منحنی پر چلتا ہے۔ منحنی کا نصف قطر ۶۰۰ فٹ ہے۔ دریافت کرو کہ ریلوں کی قوت پہیوں پر مرکزِ منحنی کی سمت میں کس قدر ہے؟

(۸) اگر سوال بالا میں انجن کی کمیت ۱۲ ٹن اور رفتار ۶۰ میل فی گھنٹہ ہو اور منحنی کا نصف قطر ۴۰۰ گز ہو تو

قوت کس قدر ہو گی؟

۱۴۰۔ مخروطی رقاص۔ اگر ایک ذرہ، جو ایک رسی کے ذریعہ ایک ثابت نقطے و سے بندھا ہو، اس طرح حرکت کرے کہ ایک افقی سطح میں ایک دائرے پر چلے اور رسی اپنی گردش سے ایک مخروط بنائے جس کا محور و میں سے گذرنے والا عمودی خط ہو تو رسی اور ذرہ دونو مل کر مخروطی رقاص کہلاتے ہیں۔ جب حرکت یکساں ہو تو ذرے کی رفتار اور رسی کے طول اور میلان کے تعلقات آسانی سے معلوم ہو سکتے ہیں۔



فرض کرو کہ ذرہ ط ہے اور رسی و ط سے بندھا ہے۔ و ایک ثابت نقطہ ہے اور رسی کا طول ل ہے۔ و میں سے عمودی خط کھینچو اور اس عمودی خط پر ط سے عمود ط ن نکالو۔ ط ایک افقی دائرے پر

چلیگا جس کا مرکز ن ہوگا - یہہ دائرہ شکل میں نقطہ دار بنایا گیا ہے -

فرض کرو کہ رسی کا تناؤ ت ہے اور اس کا میلان سمت عمودی سے عہ ہے اور ذرے کی رفتار ل ہے -

بموجب دفعہ ۱۳۵ ط کا اسراع ط ن کی سمت میں $\frac{ل^{۲}}{ط ن}$ ہے - اس لئے اس سمت میں قوت

$$م \frac{ل^{۲}}{ل\ جب\ عہ} \text{ ہوگی -}$$

ذرے پر صرف دو قوتیں عمل کرتی ہیں ایک تو رسی کا تناؤ ت ہے اور دوسری ذرے کا وزن م ج -

چونکہ سمت عمودی میں ذرے کا کوئی اسراع نہیں ہے لہذا اس سمت میں قوتیں متوازن ہوں گی -

اس لئے ت جم عہ = م ج .... (۱)

سمت ط ن میں صرف ایک قوت عمل کرتی ہے اور وہ ت جب عہ ہے

$$\text{اس لئے}\quad ت\ جب\ عہ = \frac{م\ ل^{۲}}{ل\ جب\ عہ} \quad ......(۲)$$

$$\text{(۱) اور (۲) سے}\quad \frac{ل^{۲}}{ل\ جب^{۲}\ عہ} = \frac{ج}{جم\ عہ}$$

اگر ذرہ ایک ثانیہ میں گ گردشیں کرے تو

$$\text{ر} = \text{گ} \times ۲\pi\,\text{ط ن} = ۲\pi\,\text{گ ل جب عہ}$$

$$\therefore\ ۴\pi^۲\,\text{گ}^۲\,\text{ل} = \frac{\text{ج}}{\text{جم عہ}}$$

$$\text{یعنی جم عہ} = \frac{\text{ج}}{۴\pi^۲\,\text{گ}^۲\,\text{ل}} \quad \ldots\ldots\ldots\ (۳)$$

اس لئے بذریعہ (۱)

$$\text{ت} = ۴\,\text{م}\,\pi^۲\,\text{گ}^۲\,\text{ل پونڈل} \quad \ldots\ldots\ (۴)$$

لہذا رسی کا تناؤ : ذرے کا وزن :: $۴\pi^۲\,\text{گ}^۲\,\text{ل} : \text{ج}$

(۳) اور (۴) سے عہ اور ت حاصل ہوں گے۔

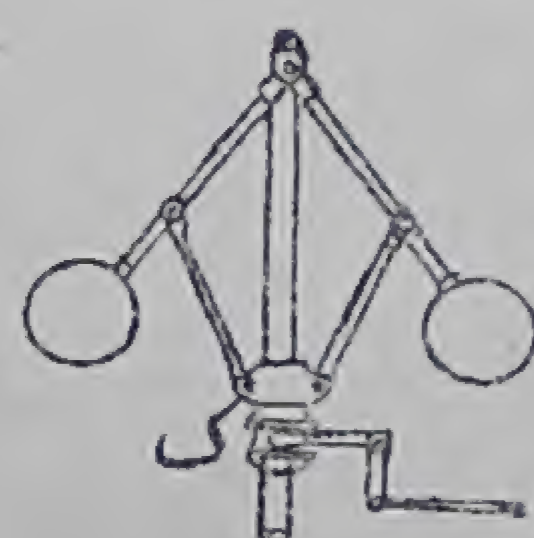
ذرے کی گردش کی مدت

$$= \frac{۲\pi\,\text{ل جب عہ}}{\text{ر}} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ل جم عہ}}{\text{ج}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{ون}}{\text{ج}}}$$

اس لئے یہہ مدت اس طرح بدلتی ہے جس طرح نقطہ ثابت سے ذرے کی گہرائی کا جذر۔

۱۴۱۔ انجنوں کے حاکم۔ جو انجن ایک جگہ ساکن رہ کر کام کرتے ہیں ان میں عموماً اس بات کی ضرورت ہوتی ہے کہ ایک ہی چال سے چلتے رہیں۔ ان کی چال کو ایک کل کے ذریعہ حدود مناسب کے اندر رکھا جاتا ہے۔ اس کل کو **حاکم** کہتے ہیں۔ یہہ کل عام طور پر دو گردش کرنے والے وزنی گولوں پر مشتمل ہوتی ہے جو ہلکی

سلاخوں سے جُڑے ہوئے ہیں - ان سلاخوں کے دوسرے سرے ایک عمودی سلاخ کے ساتھ جوڑے جاتے ہیں اور یہہ عمودی سلاخ انجن کے ذریعہ گردش کرتی ہے -
شکل میں ایک سادہ قسم دکھائی گئی ہے جو واٹ کی ایجاد ہے جب عمودی سلاخ ضرورت سے زیادہ تیز گردش کرتی ہے تو گولے تیز گردش کی وجہ سے اوپر چڑھ جاتے ہیں اور حصہ ک بھی ساتھ ہی اوپر کو اٹھتا ہے کیونکہ یہہ حصہ سلاخوں کے ذریعہ گولوں سے جڑا ہوا ہے -



ک کا تعلق پیرموں کے ذریعہ بھاپ کے کھل مندن کے ساتھ ہے - اور یہہ تعلق ایسا ہے کہ جب ک اوپر کو اُٹھتا ہے تو کھل مندن کا سوراخ چھوٹا ہوجاتا ہے اور اس لئے انجن کو بھاپ کم پہنچتی ہے - اس طرح اس کی چال بھی کم ہو جاتی ہے -
اسی طرح اگر عمودی سلاخ کی گردش سست ہو تو گولے

نیچے ہو جاتے ہیں اور ک اور کھل مندن کے تعلق کی وجہ سے کھل مندن کا سوراخ زیادہ کھل جاتا ہے اور انجن کو بھاپ زیادہ پہنچنے لگتی ہے لہذا انجن تیز ہو جاتا ہے۔ اس طرح سے حاکم خود بخود ہی مناسب مقدار میں بھاپ انجن کو پہنچاتا ہے اور انجن تقریباً یکساں چال سے چلتا ہے۔

دفعہ ۱۴۰ کے آخری نتیجے کے ذریعہ یہہ معلوم ہوسکتا ہے کہ اگر ایک انجن کا حاکم ایک منٹ میں ساٹھ گردشیں کرے تو بلندی تقریباً ۹٫۷۸ انچ ہو گی۔ اور اگر ایک منٹ میں ۱۰۰ گردشیں ہوں تو بلندی ۳٫۵۲ انچ ہو گی۔ لیکن عملی مقاصد کے لئے یہہ بلندی نہایت کم ہے۔ ہاں نہایت چھوٹے انجنوں میں یہہ بلندی ممکن ہے۔

اس مقصد کو حاصل کرنے کے لئے کہ انجنوں کے حاکم تیز گردش کرسکیں ان پر وزن کے ذریعہ یا کمانی کے ذریعہ سے بوجھ ڈالا جاتا ہے تاکہ ک نیچے رہے۔ بغیر بوجھ کے ک نیچے نہیں رہے گا۔

۱۴۲- گول سڑک پر سائیکل سوار کی حرکت۔

جب کوئی سائیکل سوار گول سڑک پر چلتا ہے تو اپنے جسم کو اندر کی طرف یعنی گول سڑک کے مرکز کی طرف مائل رکھتا ہے۔ ایسا کرنے سے زمین کا عمل سمت

عمودی سے مائل ہو جاتا ہے۔ اس عمل کا عمودی جزء سائیکل سوار اور اس کی مشین کے مجموعی وزن کے ساتھ متوازن ہے۔ اور افقی جزء اس راستے کے مرکز کی سمت میں ہوتا ہے جس پر کہ سوار اور اسکی مشین کا مرکز جمود حرکت کرتا ہے۔ اور یہی افقی جزء اس عمادی اسراع کا باعث ہوتا ہے جس کی اس صورت میں ضرورت ہوتی ہے۔

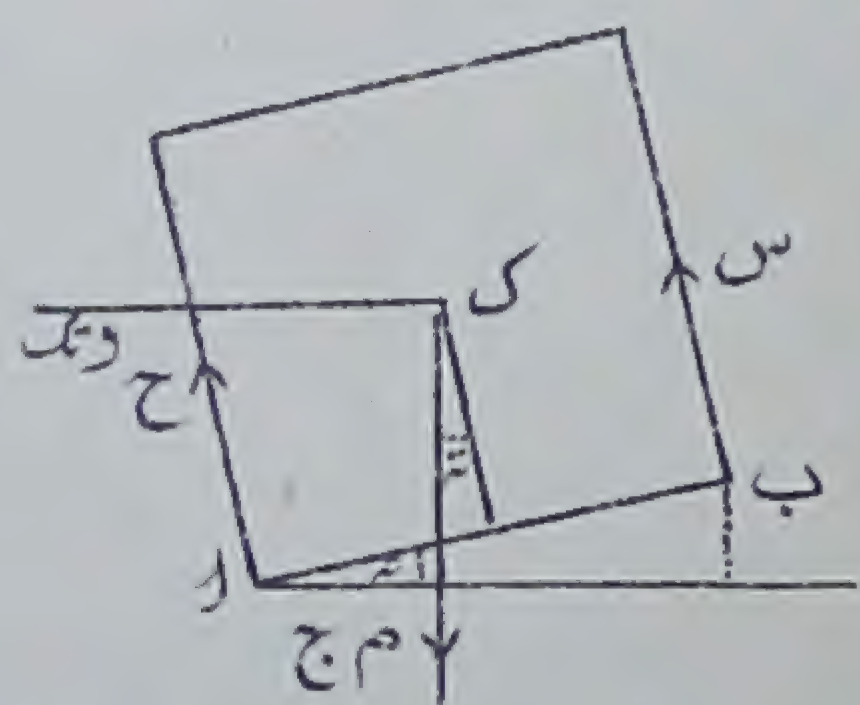
۱۴۳۔ ریلوے لائن کے گول حصے پر ریل گاڑی کی حرکت۔

اگر ریل کی سڑک سطح افقی ہو تو ریلوں کا جو عمل پہیوں پر ہوتا ہے وہ اس اسراع کو پیدا کرتا ہے جو ایسی صورتوں میں راستے کے مرکز انحنا کی سمت میں ضروری ہے لیکن اس طرح پہیوں اور ریلوں کے درمیان بہت زیادہ رگڑ پیدا ہوگی اور ریلیں اور پہیے جلدی گھس جائیں گے۔ اس بات کو روکنے کے لئے باہر کی ریل کو ذرا اونچا کردیا جاتا ہے۔ ایسا کرنے سے ریل کی سڑک افقی نہیں رہتی لہذا اس صورت میں ریل گاڑی کا فرش بھی افقی نہیں ہوگا۔ اگر یہہ مقصود ہو کہ پہیوں پر ریلوں کا عمل کچھ بھی نہ ہو تو سڑک کا میلان جو اس صورت میں ضروری ہے حسب طریقہ ذیل آسانی سے معلوم ہوسکتا ہے۔ فرض کرو کہ ریل گاڑی کی رفتار ل ہے اور فرض کرو کہ

اس دائرے کا نصف قطر، جس پر گاڑی کا مرکز جمود ک چلتا ہے، ن ہے۔

فرض کرو کہ دائرہ مذکورہ بالا کا مرکز و ہے۔ شکل ہذا گاڑی کی تراش ہے اس سطح عمودی میں جو ک و میں سے گذرتی ہے۔ فرض کرو کہ یہہ تراش ریلوں کو ا اور ب پر ملتی ہے۔

[سہولت کے لئے پہئے شکل میں نہیں دکھائے گئے]



فرض کرو کہ ح اور س ریلوں کے عمل ہیں جو فرش ا ب پر عمود ہیں اور فرض کرو کہ فرش کا میلان افق سے تہ ہے

ک و کی سمت میں ح اور س کا جزء تحلیلی، (ح + س) جب تہ، وہ قوت ہے جو منحنی کے مرکز کی سمت میں اسراع پیدا کرنے کے لئے مطلوب ہے۔

$$\therefore \text{(ح + س) جب تہ} = \text{م} \frac{\text{ر}^2}{\text{ن}} \quad \ldots\ldots (1)$$

ح اور س کے عمودی جزء گاڑی کے وزن کے ساتھ متوازن ہیں

$$\therefore (ح + س) \text{ جم } تہ = ص ج \quad \cdots\cdots\cdots (۲)$$

$$(۱) \text{ اور } (۲) \text{ سے } مس\, تہ = \frac{ر^۲}{ن\, ج} \quad \cdots\cdots (۳)$$

اس سے فرش کا میلان معلوم ہو گیا۔

اگر سڑک کا عرض یعنی اب معلوم ہو تو باہر کی ریل کی بلندی آسانی سے دریافت ہو سکتی ہے کیونکہ یہہ اب جب تہ کے مساوی ہے۔

نتیجہ بالا سے ظاہر ہے کہ اگر یہہ مقصود ہو کہ پہیوں پر افقی سمت میں کوئی زور نہ پڑے تو باہر کی ریل کی بلندی گاڑی کی رفتار پر منحصر ہو گی۔ عملاً باہر کی ریل کی بلندی اس قدر رکھی جاتی ہے کہ درمیانی رفتار کی صورت میں پہیوں پر زور نہ پڑے۔ جب گاڑی زیادہ تیز رفتار سے چلتی ہے تو جس قدر زائد قوت اسراع پیدا کرنے کے لئے مطلوب ہوتی ہے وہ ریلوں کے اس دباؤ سے حاصل ہوتی ہے جو پہیوں پر پڑتا ہے۔

اس صورت میں ریلوں کا دباؤ بطریق ذیل دریافت ہو سکتا ہے۔ فرض کرو کہ باہر کی ریل کی بلندی اس قدر رکھی گئی ہے کہ جب گاڑی رفتار ر سے چلے تو پہیوں پر دباؤ نہ پڑے۔ اگر رفتار ر سے زیادہ تیز ہو مثلاً ف

ہو تو فرض کرو کہ پہیوں پر دباؤ لا پڑتا ہے۔
شکل بالا کو استعمال کرو۔ اس میں صرف ایک قوت لا کا اضافہ ہوگا جو ب ا کی سمت میں عمل کرتی ہے۔
اب مساواتیں (۱) و (۲) صورت ذیل اختیار کرینگی

$$(ح + س) \text{ جب } تہ + لا \text{ جم } تہ = م \frac{ف^۲}{ن} \quad \ldots\ldots (۴)$$

$$(ح + س) \text{ جم } تہ - لا \text{ جب } تہ = م ج \quad \ldots\ldots (۵)$$

$$\text{پس } لا = م \frac{ف^۲}{ن} \text{ جم } تہ - م ج \text{ جب } تہ$$

$$= م \text{ جم } تہ \left[\frac{ف^۲}{ن} - ج \text{ مس } تہ\right]$$

$$= م \text{ جم } تہ \left[\frac{ف^۲ - ر^۲}{ن}\right] \quad \text{بذریعہ مساوات (۳)}$$

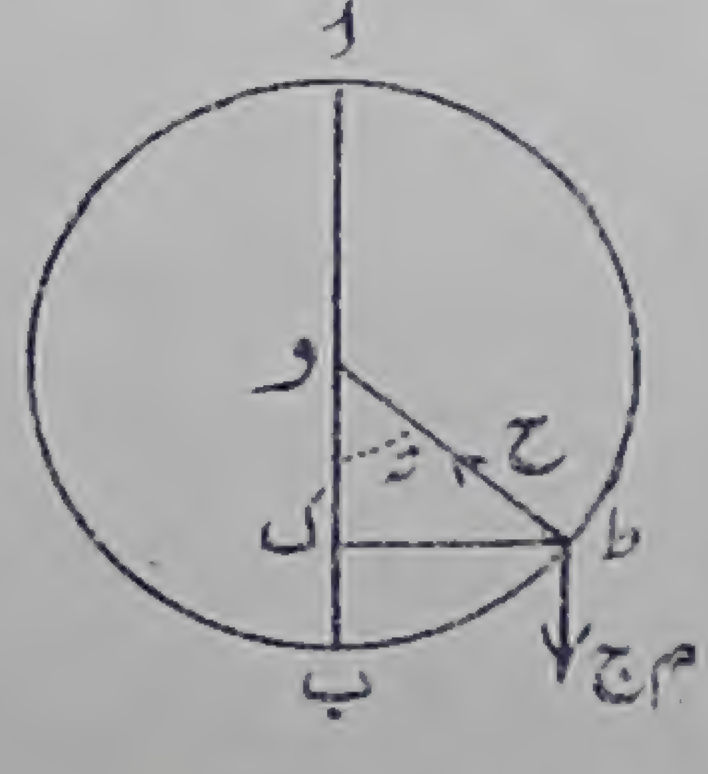
اگر ف > ر تو لا مثبت ہے اور باہر کی ریل بمقام ب دباؤ ڈالتی ہے۔
گر ف < ر تو لا منفی ہے یعنی ا ب کی سمت میں ہے۔ اس لئے اندر کی ریل بمقام ا دباؤ ڈالتی ہے۔

۱۴۴۔ گردش کرنے والا کرہ ۔ ایک چکنا کھوکھلا کرہ یکساں زاویئی رفتار ھ سے ایک عمودی قطر کے گرد گھوم رہا ہے۔ اگر ایک وزنی ذرہ کرے کے اندر

ہو تو ثابت کرو کہ وہ کرے کے اندر ایک خاص بلندی پر رہ سکتا ہے اور اگر زاویئی رفتار ایک خاص مقدار سے کم ہو تو ذرہ کرے کے صرف پست تریں نقطے پر ہی رہ سکتا ہے۔

فرض کرو کہ کرے کا محورِ گردش ا ب ہے اور ا بلندترین نقطہ ہے۔ اور فرض کرو کہ و مرکز ہے۔ اور فرض کرو کہ ذرہ مقام ط پر اضافی توازن میں رہتا ہے۔ ا ب پر ط ک عمود نکالو۔

چونکہ ط ایک دائرے میں گھومتا ہے جس کا مرکز ک ہے۔ اور ط کی زاویئی رفتار ھ ہے۔ اس لئے ک کی سمت میں قوت ؛ م ھ۲ × ط ک یعنی م ھ۲ ن جب تہ ہوگی جہاں ن کرے کا نصف قطر ہے اور تہ زاویہ ط و ب ہے



فرض کرو کہ ط پر عمادی عمل ح ہے تو ح کا افقی جزء وہ قوت ہے جو سمت ط ک میں اسراع مطلوب پیدا

کرتی ہے اور ح کا عمودی جزء ذرے کے وزن کے ساتھ متوازن ہے۔

اس لئے

ح جب تہ = م $ھ^{۲}$ ن جب تہ ......(۱)

اور ح جم تہ = م ج ....(۲)

مساوات (۱) سے یا تو جب تہ = ۰ یا ح = م $ھ^{۲}$ ن

ح کی قیمت (۲) میں رکھنے سے

$$جم\ تہ = \frac{ج}{ھ^{۲}ن} ....(۳)$$

پس ذرہ یا تو پست ترین نقطے پر رہ سکتا ہے جہاں جب تہ = ۰،

یا اس نقطے پر رہ سکتا ہے جو مساوات (۳) سے حاصل ہو گا۔

تہ کی قیمت جو مساوات (۳) سے حاصل ہوتی ہے ناممکن ہو گی جب تک کہ $ھ^{۲}$ن کی قیمت ج سے بڑی نہ ہو یعنی جب تک کہ ھ، $\left(\frac{ج}{ن}\right)^{\frac{1}{2}}$ سے زیادہ نہ ہو۔ اگر زاویئی رفتار $\left(\frac{ج}{ن}\right)^{\frac{1}{2}}$ سے کم ہو گی تو ذرے کے لئے اضافی سکون کا مقام کرے کا صرف پست ترین نقطہ ہی ہو گا۔

امثلہ نمبری (۲۴)

(۱) ۴ پونڈ کمیت کا ایک جسم تین فٹ کی رسی کے

ایک سرے سے باندھکر مخروطی رقاص کے طور پر گھمایا جاتا ہے۔ رسی کا میلان سمت عمودی سے ۴۵° رہتا ہے۔ رسی کا تناؤ اور جسم کی رفتار دریافت کرو۔

(۲) اگر ایک مخروطی رقاص کی رسی ۲۰ انچ لمبی ہو اور ایک منٹ میں ۲۰۰ گردشیں ہوں تو ثابت کرو کہ رسی کا میلان سمت عمودی سے $جم^{-1}\frac{۵۴}{۱۲۵\pi^{۲}}$ یعنی تقریباً ۸۷° ۳۰َ ہو گا۔

(۳) ایک ۴ فٹ لمبی رسی کا ایک سرا ثابت ہے اور دوسرے سرے سے ۴ پونڈ کمیت کا ایک جسم بندھا ہے۔ رسی مخروطی رقاص کے طور پر ایک منٹ میں ۳۰ گردشیں کرتی ہے۔ ثابت کرو کہ رسی کا تناؤ ۱۶۰ $\pi^{۲}$ پونڈل ہے اور اس کا میلان سمت عمودی سے $جم^{-1}\left(\frac{۸}{\pi^{۲}}\right)$ یعنی تقریباً ۳۵° ۵۱َ ہے۔

(۴) ایک گز لمبی رسی سے ایک وزنی ذرہ لٹکتا ہے۔ ذرے کو اٹھایا جاتا ہے اس طرح کہ رسی کسی رہتی ہے۔ جب رسی سمت عمودی سے ۶۰° کا زاویہ بناتی ہے تو ذرہ افقی سمت میں پھینکا جاتا ہے۔ اگر یہہ مقصود ہو کہ ذرہ افقی سطح میں حرکت کرتا رہے تو رفتارِ رمی دریافت کرو۔

(۵) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ۲ ٹن ہے ایک

منحنی سڑک پر ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے
منحنی کا نصف قطر ۷۰۰ فٹ ہے۔ اگر ریل کی سڑک
افقی ہو تو ثابت کرو کہ باہر کی ریل کا دباو پہیوں پر
۱۴۰۸ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔

(۶) ایک ریل گاڑی ۴۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک منحنی پر چل رہی ہے۔ منحنی کا نصف قطر $\frac{1}{4}$ میل ہے۔ اگر ریلوں کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ہو تو معلوم کرو کہ باہر کی ریل کو اندر کی ریل سے کس قدر بلند کیا جائے کہ ریلوں کا دباؤ پہیوں پر نہ پڑے۔

(۷) ایک ریل گاڑی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے ایک منحنی پر جا رہی ہے منحنی کا نصف قطر ۴۰۰ گز ہے۔ ریلوں کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ہے۔ اگر یہ مقصود ہو کہ ریلوں کا دباؤ پہیوں پر نہ پڑے تو دریافت کرو کہ باہر کی ریل کو کس قدر بلند کیا جائے؟

(۸) ایک ریل گاڑی ایک گول سڑک پر جا رہی ہے جس کا نصف قطر ۱۳۲۰ فٹ ہے۔ دریافت کرو کہ باہر کی ریل کو کس قدر بلند کریں کہ ریلوں کا دباؤ پہیوں پر نہ پڑے۔ ریلوں کا درمیانی فاصلہ ۵ فٹ ہے اور گاڑی کی رفتار ۴۵ میل فی گھنٹہ ہے۔

(۹) ایک جسم ایک ۶ فٹ لمبی رسی کے ذریعہ سے ایک ریل گاڑی کی چھت سے لٹک رہا ہے۔ اگر گاڑی

۹۔ اگر نصف قطر والے منحنی پر ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہو تو ثابت کرو کہ جسم سمت عمودی سے تقریباً ایک فٹ $\frac{1}{4}$ ۲ انچ ہٹ جائے گا۔

(۱۰) ۶ انچ نصف قطر والی کروی سطح کو کاٹ کر ایک کٹورہ ۳ انچ گہرا بنایا گیا ہے اور وہ اپنے عمودی محور کے گرد گھومتا ہے۔ دریافت کرو کہ زیادہ سے زیادہ وہ کتنی گردشیں ایک منٹ میں کر سکتا ہے کہ ایک ذرہ اس کی سطح پر بغیر باہر نکل جانے کے ٹکا رہے۔

(۱۱) ایک چکنی کھوکھلی مخروط کا زاویہ راس ۲ تہ ہے۔ اس کا محور عمودی ہے اور راس نیچے کی طرف ہے۔ اگر ایک جسم اس کی سطح پر محور کے گرد دائرے میں گھومے اور ایک ثانیہ میں ن گردشیں کرے تو ثابت کرو کہ محور سے اس کا فاصلہ $\frac{\text{ج مم تہ}}{\text{۴ ∏}^2\text{ ن}^2}$ ہو گا۔

(۱۲) ایک پون چکی کے بادبان ۲۹ فٹ لمبے ہیں اور ایک منٹ میں ۱۰ گردشیں کرتے ہیں۔ اگر ایک آدمی ایک بادبان کے بیرونی سرے سے لپٹا ہوا ہو تو ثابت کرو کہ آدمی کے راستے کے بلند ترین مقام پر بادبان کا عمل اس پر کچھ بھی نہیں ہو گا۔ اس لئے اگر ایک آن کے لئے آدمی اپنے ہاتھ چھوڑ دے تو نہیں گریگا۔

(۱۳) ۲ فٹ لمبی ایک رسی کا ایک سرا ایک ثابت نقطے سے

بندھا ہے اور رسی کے دوسرے سرے سے ایک وزنی ذرہ بندھا ہے۔ اس ثابت نقطے میں سے گذرنے والی ایک عمودی سطح میں ذرہ ۶۰۰ گردشیں ایک منٹ میں کرتا ہے۔ یہ تسلیم کرلو کہ ذرے کی چال یکساں رہتی ہے۔ رسی کی عمودی وضعوں اور افقی وضع میں رسی کے جو تناؤ ہوں ان کی نسبتیں معلوم کرو۔

(۱۴) دو ذروں کی کمیتیں مساوی ہیں۔ وہ دونوں ایک بے وزن رسی سے بندھے ہیں۔ ایک ذرہ رسی کے ایک سرے سے اور دوسرا رسی کے وسط میں۔ اسطرح باندھ کر رسی کو ایک چکنی میز پر رکھدیا گیا ہے اور رسی کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے سے باندھ دیا گیا ہے۔

اگر رسی کو کسا جائے اور دونو ذروں کو اس طرح پھینکا جائے کہ وہ اپنی گردش میں خط مستقیم میں رہیں تو ثابت کرو کہ رسی کے دونو حصوں کے تناؤں کی نسبت ۳ : ۲ ہے۔

(۱۵) ایک ریل گاڑی ایک خط مستقیم میں رفتار ر سے چلتے چلتے سڑک کے ایک منحنی حصے پر آتی ہے جسکا نصف قطر ن ہے۔ اگر گاڑی میں پانی کا ایک ثابت کٹورہ ہو یا ایک چھوٹی رسی سے شاقول لٹک رہا ہو تو پانی کی سطح کا یا شاقول کا اوسط میلان مس$^{-1}$ $\frac{ر^2}{ج ن}$

ہو گا۔

(۱۶) ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے جس کا طول ل ہے۔ رسی کا دوسرا سرا ایک ایسے ثابت نقطے سے بندھا ہے جو ایک چکنی میز کے اوپر کی طرف بلندی ب پر واقع ہے۔ اگر ذرہ میز پر ایک ثانیہ میں ن گردشیں کرے تو میز کا عمل دریافت کرو۔ اور یہہ بھی معلوم کرو کہ ن کی بڑی سے بڑی قیمت کیا ہو سکتی ہے جس سے ذرہ میز کے ساتھ مس کرتا رہے۔

(۱۷) ایک کھلی چھتری پانی میں بھیگی ہوئی ہے۔ اسکی ڈنڈی کو عمودی سمت میں سیدھا رکھکر چھتری کو گھمایا جاتا ہے۔ ۳۳ ثانیوں میں چھتری ۱۴ گردشیں کرتی ہے۔ اگر چھتری کا کنارہ ایک دائرہ ہو جس کا قطر ایک گز ہے اور اس کی بلندی زمین سے چار فٹ ہو تو ثابت کرو کہ جو قطرے چھتری کو گردش کی وجہ سے کنارے سے چھٹ کر زمین پر گرینگے وہ ایک ایسے دائرے کے محیط پر گرینگے جس کا قطر پانچ فٹ ہوگا۔ اور اگر ایک قطرے کی کمیت ۰۱ء اونس ہو۔ تو ثابت کرو کہ قطرے کو چھتری کے کنارے کے ساتھ رکھنے کے لئے جو قوت درکار ہوگی وہ مقدار میں ۰۲۱ء پونڈل ہوگی اور اس کی سمت عمودی سمت سے بزاویہ مس$^{-1}\frac{1}{2}$ مائل ہوگی۔

(۱۸) ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ایک چکنی میز پر ایک باریک رسی کے ایک سرے سے باندھ دیا گیا ہے۔ میز میں ایک چھوٹا سا سوراخ ہے جس میں سے رسی گذر کر اپنے دوسرے سرے پر ایک دوسرے ذرے کو سہارتی ہے۔ دوسرے ذرے کی کمیت ۲ م ہے۔ م کو پکڑ کر سوراخ سے فاصلہ ف پر رکھا جاتا ہے۔ اب یہہ معلوم کرو کہ م کو کس رفتار سے پھینکا جائے کہ وہ میز پر ایک ایسے دائرے میں گھوم سکے جس کا نصف قطر ف ہو۔

(۱۹) دو ذرے جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں ایک چکنی میز پر ایک رسی کے سروں سے بندھے ہیں اور رسی ایک چھوٹے سے حلقے میں سے گذرتی ہے جو میز میں نصب کیا گیا ہے۔ اگر دونو ذروں کو بالترتیب رفتاروں ل اور لَ سے اس طرح پھینکا جائے کہ ان کی حرکت کی سمتیں رسی سے زاوئے قائمے بنائیں جبکہ رسی ابتدائی حرکت میں کسی ہوئی ہے تو دریافت کرو کہ حلقہ رسی کو کس نسبت میں تقسیم کرے کہ دونو ذرے ایسے دائروں میں گھوم سکیں جنکا مرکز حلقہ ہو۔

(۲۰) دو ذرے جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں ایک رسی کے دونو سروں سے بندھے ہیں۔ رسی کا طول ط ہے اور وہ ایک چھوٹے حلقے میں سے گذرتی ہے۔

دریافت کرو کہ چھوٹا ذرہ م مخروطی رقاص کے طور پر کتنی گردشیں ایک ثانیہ میں کرے کہ بڑا ذرہ حلقے سے فاصلہ ل پر حالت سکون میں لٹک سکے۔

(۲۱) ایک چکنی میز میں ایک سوراخ ہے جس میں سے ایک رسی گذرتی ہے۔ رسی کے سروں سے دو چھوٹے کرے بندھے ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے۔ میز کے اوپر کا کرہ ایک دائرہ میں گردش کرتے کرتے کسی چیز سے ٹکرا کر اپنی نصف رفتار کھو دیتا ہے۔ دریافت کرو کہ نیچے کے کرے کی کمیت میں کتنی کمی کی جائے کہ اوپر کا کرہ دائرے میں گردش کرتا رہے۔

(۲۲) ایک رسی ط ا ق ایک چکنی میز کے سوراخ ا میں سے گذرتی ہے۔ رسی کا حصہ اط میز پر ہے اور حصہ اق میز کے نیچے ہے اور سمت عمودی سے ۴۵° کا زاویہ بناتا ہے لیکن اس طرح کہ ط اور ق ایک ہی عمودی خط میں واقع ہیں۔ اگر ط اور ق پر دو جسم باندھ دئے جائیں اور رسی کے دونو حصوں کو کس کر دونو جسموں کو افقی سمت میں پھینکا جائے اور اگر اس طرح پھینکنے سے سطح ط ا ق ہمیشہ عمودی رہے اور زاویہ ط ا ق ۴۵° کا رہے تو دونو جسموں کی کمیتوں کی نسبت معلوم کرو۔ اگر رسی کا طول ۴ فٹ ہو تو رسی کی گردش کی مدت بھی معلوم کرو۔

(۲۳) ایک جسم جس کی کمیت م ہے ایک میز پر حرکت کرتا ہے لیکن اس طرح کہ جسم ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے جس کا دوسرا سرا میز کے ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے اور رسی ایسی ہے کہ کھینچنے سے اس کا طول بڑھ سکتا ہے اور اس کی لچک کا مقیاس لہ ہے۔ اگر رسی کا اصلی طول ا ہو اور جسم ایک ایسے دائرے میں گردش کررہا ہو جس کا نصف قطر ن ہے تو جسم کی رفتار معلوم کرو۔

(۲۴) ایک لچکدار رسی کا ایک سرا ایک ثابت نقطے ا سے بندھا ہے اور دوسرے سرے سے ایک ذرہ لٹک رہا ہے۔ رسی کی لچک کا مقیاس ذرے کے وزن کا دوچند ہے اور رسی کا اصلی طول ل ہے۔ اب رسی کو ایک مخروطی رقاص کی صورت میں گھمایا جاتا ہے جس کا محور ا میں سے گذرنے والا عمودی خط ہے اگر غیر متبدل حرکت کی حالت میں ا سے نیچے گول راستے کا فاصلہ ل ہو تو ثابت کرو کہ ذرے کی رفتار $\sqrt{\text{۳ ج ل}}$ ہوگی۔

(۲۵) سوال (۸) میں افقی دباؤ معلوم کرو جبکہ رفتار
(۱) ۳۰ میل فی گھنٹہ (۲) ۶۰ میل فی گھنٹہ ہو۔ گاڑی کی کمیت دس ٹن ہے۔
ہر ایک صورت میں بیان کرو کہ کونسی ریل کا دباؤ پڑتا ہے؟

باب دہم

جاذبہ ارض کے زیر عمل ایک چکنے منحنی پر حرکت

۱۴۵ - اس کتاب میں ایک ذرے کی حرکت کے اُس عام مسئلہ پر بحث نہیں ہو سکتی جبکہ ذرہ کوئی سی مفروضہ قوتوں کے زیر عمل ایک منحنی پر چلایا جائے یا جبکہ ذرہ جاذبہ ارض کے زیر عمل کسی منحنی پر چلایا جائے۔

جاذبہ ارض کے زیر عمل صرف ایک صورت ہے جو ہم ابتدائی اصولوں کی امداد سے حل کر سکتے ہیں اور جو کہ حرکت کے متعلق بہت سے امور دریافت کرنے کے لئے مفید ہے۔

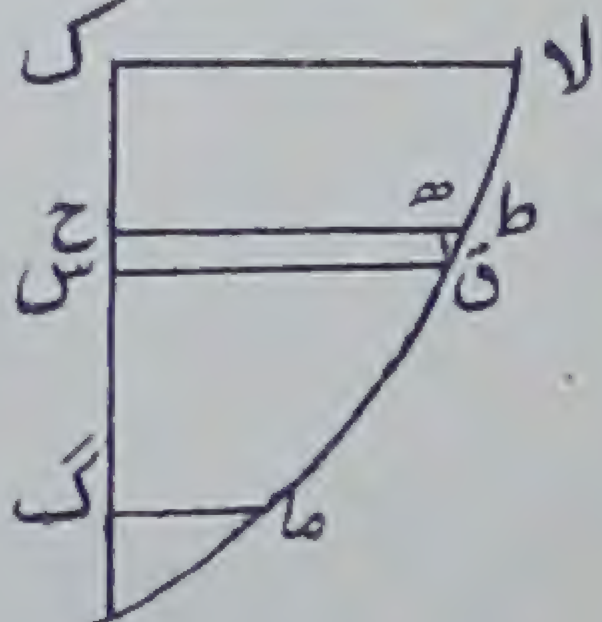
۱۴۶ - مسئلہ - اگر ایک ذرہ ایک چکنے منحنی کی ایک قوس پر نیچے کی طرف پھسلتا ہوا سطح عمودی میں حرکت کرے اور اگر اس کی ابتدائی رفتار ب ہو اور عمودی فاصلہ ی پھسلنے کے بعد رفتار ل ہو تو ثابت کرو کہ

$ل^2 = ب^2 + ۲ج ی$ ۔

فرض کرو کہ لا منحنی کا وہ نقطہ ہے جہاں سے

ذرہ پھسلنا شروع کرتا ہے اور ما وہ نقطۂ منحنی ہے۔
جس کا عمودی فاصلہ لا سے ی ہے۔ لاک اور
ماگ افقی خط کھینچو جو کسی عمودی خط کو ک اور گ
پر ملیں۔

فرض کرو کہ ط اور ق منحنی پر دو نقطے ہیں جو ایک
دوسرے کے بہت قریب ہیں۔ ک گ پر ط ح اور
ق س عمود کھینچو۔ تو ط ق تقریباً خط مستقیم کا ایک
چھوٹا ٹکڑا ہو گا۔
ق ھ عمودی سمت میں کھینچو تا کہ ط ح سے ھ پر ملے۔



ط پر اسراع ط ق کی سمت میں ج جم ھ ق ط ہے۔
اس لئے اگر ط اور ق پر رفتاریں $ر_{ط}$ اور $ر_{ق}$ ہوں تو

$$\text{ر}_{\text{ق}}^{۲} = \text{ر}_{\text{ط}}^{۲} + ۲\,\text{ج جم ھ ق ط} \times \text{ط ق} = \text{ر}_{\text{ط}}^{۲} + ۲\,\text{ج ھ ق}$$

$$\text{ش}\quad \text{ر}_{\text{ق}}^{۲} - \text{ر}_{\text{ط}}^{۲} = ۲\,\text{ج ھ ق}$$

یعنی رفتار کے مربعے میں جو تبدیلی ہوتی ہے وہ ط اور ق
کے درمیانی عمودی فاصلے کے باعث ہوتی ہے۔ چونکہ

یہہ قوس کے ہر ایک چھوٹے جزء کی صورت میں صحیح ہے اس لئے یہہ تمام قوس لا ما کی صورت میں صحیح ہے۔

اس لئے لا سے ما تک پھسلنے میں رفتار کے مربعے میں جو تبدیلی ہوگی وہ عمودی فاصلے ی کے باعث ہوگی یعنی

$$ر^۲ = ب^۲ + ۲ ج ی$$

مسئلہ بالا اصول بقاء توانائی کے ذریعہ بھی ثابت ہوسکتا ہے۔ چونکہ منحنی چکنا ہے اس لئے قوس کا عمل ہمیشہ ذرے کی سمتِ حرکت پر عمود ہوگا۔ اس لئے (بموجب سکونیات دفعہ ۱۹۶) منحنی کا دباؤ ذرے پر کوئی کام نہیں کرتا۔ اس لئے جو قوت کام کرتی ہے وہ صرف ذرے کا وزن ہے۔

چونکہ توانائی کی تبدیلی اس کام کے مساوی ہے جو ذرے پر ہوا اس لئے

$$\frac{۱}{۲} م ر^۲ - \frac{۱}{۲} م ب^۲ = \text{کام جو وزن نے کیا} = م ج ی$$

$$\therefore ر^۲ = ب^۲ + ۲ ج ی$$

۱۴۷- اگر چکنے منحنی کے نیچے کی طرف پھسلنے کی بجائے ذرہ اس منحنی پر اوپر کی طرف پھینکا جائے تاکہ اوپر کی طرف حرکت کرے۔ تو اس صورت میں اگر ابتدائی رفتار ب ہو اور عمودی فاصلہ ی طے کر چکنے کے بعد

رفتار ر ہو تو یہہ رفتار ر مساوات ذیل سے حاصل ہوگی

$$ر^2 = ب^2 - 2 ج ی$$

اس لئے ذرے کی رفتار اس وقت تک معدوم نہوگی جب تک کہ ذرہ منحنی کے ایک ایسے نقطے پر نہ پہنچے جس کا عمودی فاصلہ نقطے رمی سے $\frac{ب^2}{2ج}$ ہے۔ اس سے ظاہر ہے کہ جس بلندی تک ذرہ اوپر چڑھ سکتا ہے وہ منحنی کی شکل پر منحصر نہیں ہے۔ اور یہہ بھی ضروری نہیں ہے کہ ذرہ اپنی حرکت کے دوران میں اوپر وار ہی چڑھتا رہے۔ یہہ ممکن ہے کہ ذرے کی حرکت پہلے اوپر کی طرف ہو پھر نیچے کی طرف پھر اوپر کی طرف و علی ہذا القیاس۔ جس مقام پر آخر کار ذرہ ساکن ہوگا اس کی بلندی ی ہوگی اس مقام سے جہاں ذرے کی رفتار ب ہے۔

اس سے یہہ نتیجہ نکلتا ہے کہ اگر ایک ذرہ حالت سکون سے ایک چکنی قوس پر حرکت کرے تو وہ اس وقت ساکن ہوگا جبکہ وہ نقطۂ ابتداءِ حرکت کے مساوی بلندی تک پہنچیگا۔ نٹ گاڑی اس کی ایک تقریبی مثال ہے۔ کیونکہ یہہ جس مقام سے چلتی ہے اسکے مساوی بلندی تک پھر چڑھ جاتی ہے۔

نظرًا اور عملًا جو نتائج حاصل ہوتے ہیں ان میں تھوڑا سا

فرق ہوتا ہے اس کی وجہ ہوا کی مزاحمت اور پہیوں کی رگڑ ہے جو نظر انداز نہیں ہو سکتی اگرچہ مقدار میں کم ہے۔ نٹ گاڑی کا وزن جتنا زیادہ ہو گا اتنا ہی کم فرق نظری اور عملی نتائج میں ہو گا۔

ایک ایسے مقام پر جس کی بلندی نقطۂ ابتداء حرکت سے ہی ہے رفتار ایک ہی ہو گی خواہ وہاں ذرہ اوپر جا رہا ہو یا نیچے جا رہا ہو۔

دفعہ گذشتہ کا مسئلہ صرف حرکت بجاذبۂ ارض کے لئے ہی صحیح نہیں ہے بلکہ وہ ہر ایک ایسے ذرے کی حرکت کے لئے بھی درست ہے جو کسی چکنے منحنی پر ایک مستقل قوت کے زیر عمل حرکت کرے جہاں قوت کی سمت بھی مستقل رہتی ہے۔ ایک چکنی مائل سطح پر کی حرکت اسکی ایک مثال ہے۔

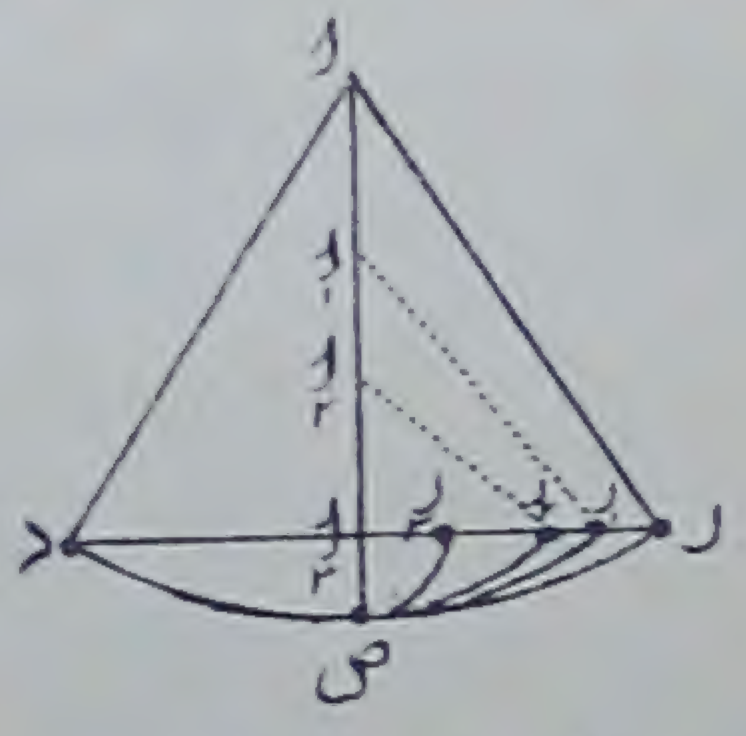
یہہ مسئلہ اس صورت میں بھی صحیح ہے جب ہم منحنی کی بجائے ایک بے لچک رسی رکھیں جو ایک ثابت نقطے سے بندھی ہو یا ایک سلاخ رکھیں جو ذرے کی حرکت کی سمت پر ہمیشہ عمود وار رہے۔ کسی منحنی پر ذرے کی حرکت کا عام مسئلہ علم احصا کی امداد کے بغیر عموماً حل نہیں ہو سکتا۔

۱۴۸۔ گلیلیو کا تجربہ

جو جسم ایک چکنے منحنی پر نیچے کی طرف پھسل رہا ہو

اس کی حرکت کے متعلق صحیح تجربے کرنا آسان نہیں ہے۔ کیونکہ عملاً یہ ناممکن ہے کہ چکنا منحنی دستیاب ہو سکے۔ لیکن ہم اس کی مشابہ صورت میں مسئلہ دفعہ ۱۴۶ کی تصدیق تجربوں کے ذریعہ کر سکتے ہیں یعنی ایسی صورت میں جہاں ذرہ ایک رسی سے بندھا ہے۔

ایک وزنی جسم لو مثلاً سیسے کی گولی۔ اس کو ایک ہلکی نرم رسی کے ایک سرے سے باندھ دو۔ رسی کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے ا سے باندھ دو۔ اب جسم کو ایک تختہ سیاہ کے سامنے جھولنے دو تو جسم ایک دائرے کی قوس پر حرکت کریگا جس کا مرکز ا ہے۔



تختہ سیاہ پر نقطہ د کا نشان لگاؤ جہاں سے جسم حرکت کرنے کے لئے چھوڑا جاتا ہے۔ اس نقطے د میں سے ایک افقی خط د ا ر کھینچو۔ اگر اب گولی کو جھولنے دیا جائے تو وہ دوسری طرف ایک نقطہ ر پر ساکن ہوگی جو تقریباً خط د ا ر پر واقع ہے

اب ایک نقطہ اِ تختہ سیاہ پر لو جو عموداً ا کے نیچے ہو۔ اِ پر ایک کیل گاڑ دو جو اتنی بڑی ہو کہ رسی جھولتے وقت اس میں اٹک سکے۔ اب اگر گولی کو پہلے کی طرح نقطہ د سے چھوڑا جائے تو پہلے تو وہ قوس د ص پر چلے گی پھر قوس ص ب پر حرکت کرے گی جس کا مرکز اِ ہے۔ یہہ معلوم ہوگا کہ نقطہ ب جہاں وہ ساکن ہوگی تقریباً افقی خط د ب پر واقع ہے۔ اب اس عمل کو معکوس کرو یعنی گولی کو ب سے چھوڑو۔ تو اس کا راستہ ب ص د ہوگا۔

اب اِ اور پھر بعد اس کے اِ پر کیل گاڑ کر یہہ تجربہ کرو۔ ہر ایک صورت میں یہی نتیجہ حاصل ہوگا یعنی یہہ کہ اگر گولی کو د سے چھوڑا جائے تو دوسری طرف وہ ایسے نقطے پر ساکن ہوگی جو تقریباً اس افقی خط میں واقع ہوگا جو د میں سے گذرتا ہے

اگر ہوا کی مزاحمت نہ ہو (جو اگرچہ کم ہے لیکن قابل شمار ہے) تو نقطے ب، ب، ب، عین خط مستقیم د ب پر واقع ہونگے۔ اگر سیسے کی گولی کی بجائے ایک ہلکی گولی استعمال کریں جو اسی ناپ کی ہو تو ہوا کی مزاحمت کا اثر زیادہ ہوگا۔ اس صورت میں گولی خط د ب سے اتنا قریب نہیں پہنچ سکیگی جتنا کہ سیسے کی گولی پہنچی تھی۔

اگر بجائے اِ، اِ، اِ، کے ہم کسی اور نقطے ط پر کیل

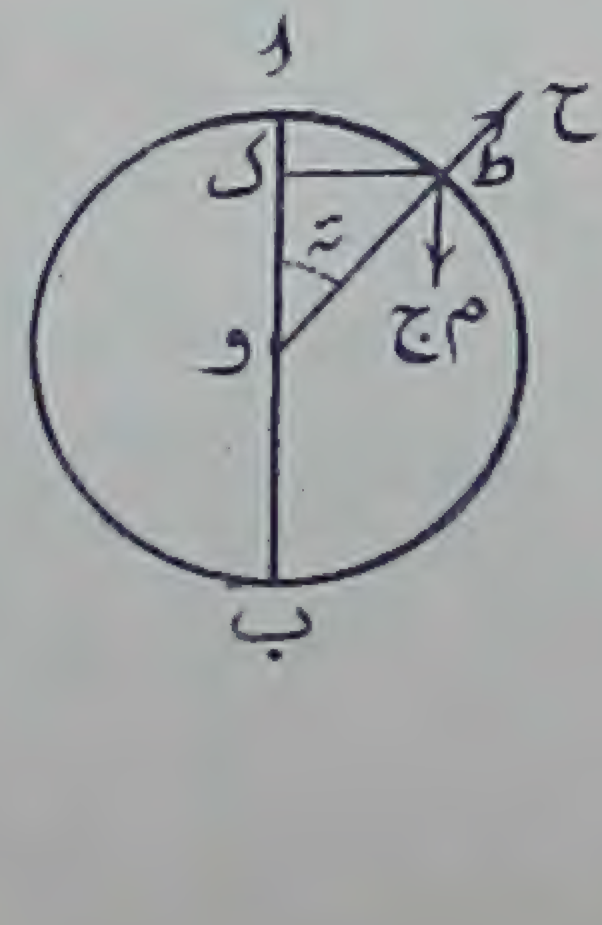
گاڑیں جو مثلث ا د ر میں واقع ہے تاکہ رسی اس کیل سے اٹک جائے تو بھی وہی نتیجے حاصل ہوں گے۔

۱۴۹۔ ایک عمودی دائرے کے باہر کی طرف حرکت۔

اگر ایک ذرہ ایک چکنے عمودی دائرے کی چوٹی سے دائرے پر بحالت سکون سے نیچے کی طرف پھسلنے کے لئے چھوڑا جائے تو ثابت کرو کہ جب وہ دائرے کے نصف قطر کے ایک ثلث کے مساوی فاصلہ عموداً طے کرچکیگا تو وہ دائرے پر سے اتر جائے گا۔

فرض کرو کہ دائرے کا مرکز و ہے اور اس کا بلند ترین نقطہ ا ہے۔

فرض کرو کہ جب ذرہ دائرے کے نقطہ ط پر پہنچتا ہے اس کی رفتار ر ہے اور منحنی کا عمل ح ہے۔ فرض کرو کہ دائرے کا نصف قطر ن ہے۔ عمودی نصف قطر و ا پر ط ک عمود کھینچو اور فرض کرو کہ ا ک = ی



تب $ر^{۲} = ۲ج \times اک = ۲ج ی$

ط و کی سمت میں قوت

$$= م\,ج\,جم\,تہ - ح$$

جہاں تہ زاویہ ط و ا ہے۔

لیکن بموجب دفعہ ۱۳۵ ط و کی سمت میں جو قوت ہے وہ لازماً $م\frac{ر^{۲}}{ن}$ کے مساوی ہے۔

$$\therefore \frac{م\,ر^{۲}}{ن} = م\,ج\,جم\,تہ - ح$$

$$\therefore ح = م\left[ج\,جم\,تہ - \frac{ر^{۲}}{ن}\right]$$

$$= م\left[ج\,\frac{ن-ی}{ن} - \frac{۲ج\,ی}{ن}\right]$$

$$= م\,ج\,\frac{ن-۳ی}{ن}$$

اس سے ظاہر ہے کہ جب ۳ ی = ن یعنی $ی = \frac{ن}{۳}$ ہو جاتا ہے تو اس وقت عمل ح معدوم ہو جاتا ہے اور اس کی علامت بدل جاتی ہے۔ اس لئے ذرہ اس وقت منحنی پر سے اتر جائے گا اور آزادانہ ایک قطع مکافی میں حرکت کرے گا۔ کیونکہ اس خاص مقام سے گذرنے کے بعد ذرہ اسی صورت میں دائرے پر رہ سکتا ہے اگر عمل ح تناؤ کی صورت اختیار کرے

لیکن یہہ ناممکن ہے کیونکہ منحنی ذرے کو کھینچ نہیں سکتا۔

۱۵۰- عمودی دائرے میں حرکت۔ ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ایک رسی کے ذریعہ جس کا طول ن ہے ایک ثابت نقطے سے سمت شاقولی میں لٹکتا ہے۔ اب اس کو رفتار ب سے حرکت دی جاتی ہے اور یہہ ایک عمودی دائرے میں گردش کرنے لگتا ہے۔ اس حرکت کے دوران میں کسی نقطے پر رفتار اور تناؤ دریافت کرو۔ اور وہ شرط بھی دریافت کرو جس کے پورے ہونے سے ذرہ عین پوری گردش کر سکے۔

فرض کرو کہ ثابت نقطہ جس سے رسی بندھی ہے و ہے۔ اور و میں سے خط و ل شاقولی سمت میں کھینچا گیا ہے۔

فرض کرو کہ نقطہ ط پر ذرے کی رفتار ر ہے اور رسی کا تناؤ ت ہے۔

و ل پر ط ک عمود کھینچو۔ فرض کرو کہ ل ک = ی

فرض کرو کہ زاویہ ط و ل = تہ



تب بموجب دفعہ ۱۴۷ ر۲ = ب۲ - ۲ ج ی ......(۱)

اور بموجب دفعہ ۱۳۵، م ر۲/ن مساوی ہے اس قوت کے جو ذرے پر عماد ط و کی سمت میں عمل کرتی ہے۔

∴ م ر۲/ن = ت - م ج جم تہ

= ت - م ج (ن - ی)/ن

∴ ت = م (ر۲ + ج (ن - ی))/ن

یعنی ت = م (ب۲ + ج (ن - ۳ ی))/ن ......(۲)

مساوات (۱) و (۲) سے ذرے کی رفتار اور رسی کا تناؤ طریق کے کسی نقطے پر معلوم ہو گیا۔

اگر رسی کا تناؤ منفی ہو جائے تو ذرہ دائرے کے بلند ترین نقطے ھ پر نہیں پہنچ سکتا۔ تناؤ کے منفی ہونے کے معنی یہہ ہوں گے کہ رسی بجائے کھینچنے کے دھکیلنا شروع کرتی ہے۔ اور یہہ ناممکن ہے کیونکہ رسی دھکیل نہیں سکتی۔

اس لئے ذرہ عین پوری گردشیں اس صورت میں کر سکیگا جبکہ تناؤ بلند ترین نقطے پر صفر ہو سکے جہاں ی = ۲ن

یہہ اس حالت میں ہوگا جب

ب^2 + ج (ن - ۶ ن) = ۰ بذریعہ مساوات (۳)

یعنی جب ب^2 = ۵ ج ن

پس پوری گردشیں اس صورت میں ممکن ہیں جب کہ ب $\sqrt{\text{۵ ج ن}}$ سے کم نہ ہو۔

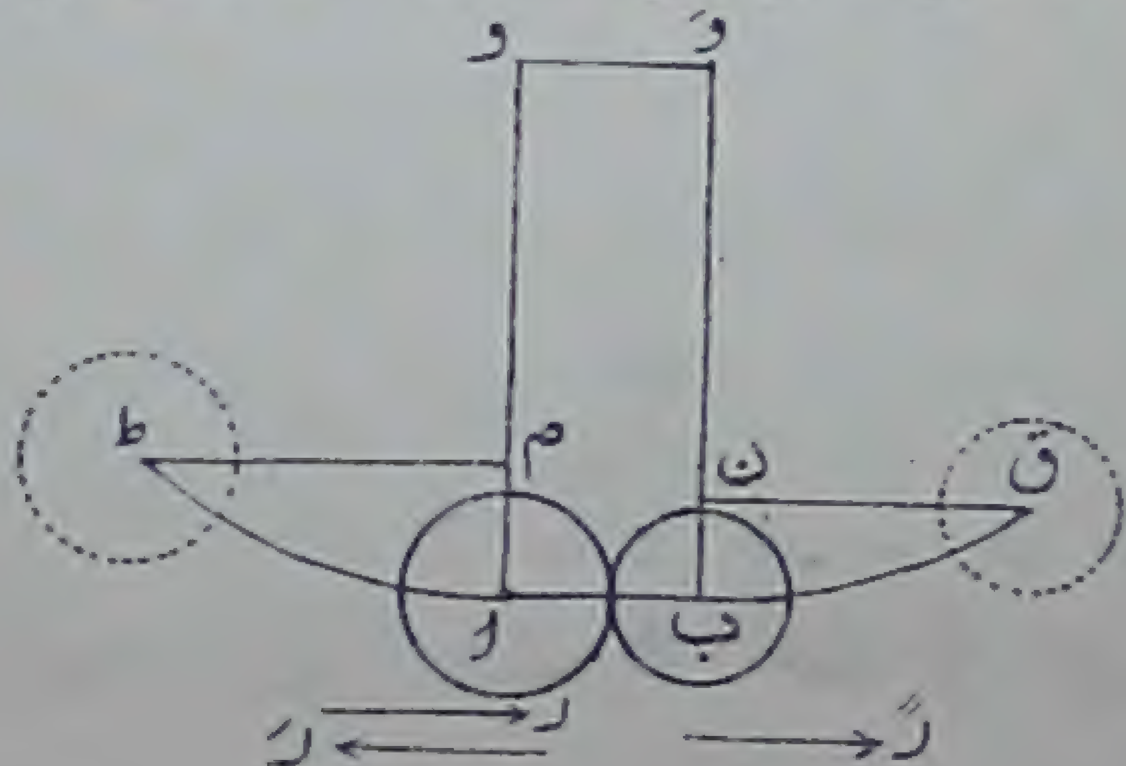
اگر ب = $\sqrt{\text{۵ ج ن}}$ تو پست ترین نقطے پر

$$\text{تناؤ} = \text{م}\ \frac{\text{۵ ج ن + ج ن}}{\text{ن}} = \text{۶ م ج پونڈل}$$

اس لئے رسی اس قدر مضبوط ہونی چاہیئے کہ جسم کے وزن کا چھ گنا سہار سکے۔

۱۵۱- نیوٹن کا تجربی قانون۔ بذریعہ مسئلہ دفعہ ۱۴۷ ہم بتلا سکتے ہیں کہ نیوٹن نے قانون تصادم (جس کا بیان دفعہ ۱۱۸ میں ہوا) کس طرح دریافت کیا۔

دو چھوٹے کرے متوازی رسیوں و ا اور وَ ب کے ذریعہ لٹکاؤ۔ رسیوں کے طول اسقدر ہوں کہ جب دونو کرے بلا تکلف لٹک رہے ہوں تو وہ عین مس کریں اور ان کے مرکز ایک ہی افقی خط میں واقع ہوں



اب کرے ا کو پیچھے کی طرف کھینچو لیکن رسی کسی رہے۔ کرے کو اس قدر کھینچو کہ اس کے مرکز کی بلندی ا م (= ی) ہو۔ یہہ بلندی مرکز کی ابتدائی وضع ا سے ناپی جائے گی۔ اب یہاں سے کرے کو چھوڑ دو تاکہ بلا تکلف حرکت کرے۔ یہہ کرہ ا نیچے کی طرف آئے گا اور دوسرے کرے ب سے ٹکرائے گا۔

جب کرہ ا، ب سے ٹکراتا ہے تو ا کی رفتار √۲ ج ی ہوگی فرض کرو کہ ٹکر کے بعد کروں کی رفتاریں رَ اور رً ہیں اور یَ اور یً وہ بلندیاں ہیں جہاں تک وہ ان رفتاروں کی وجہ سے اوپر وار جاتے ہیں۔

تو رَ = √۲ ج یَ اور رً = √۲ ج یً

کرہ ا ٹکر کے بعد یا تو پیچھے ہٹیگا یا ساکن رہے گا یا ب کے پیچھے جائے گا۔

فرض کرو کہ کرہ ا پیچھے ہٹتا ہے تو رفتار تباعد رَ+رً یعنی √۲ ج (√یَ + √یً) ہے۔

رفتار تقارب √۲ ج × √ی تھی

مختلف تجربے کرنے سے ہمیں معلوم ہوگا کہ ی کی قیمت خواہ کچھ ہی ہو اور ا اور ب کی کمیتوں کی نسبت خواہ کچھ ہی ہو، (√یَ + √یً) اور √ی کی نسبت ایک ہی رہے گی۔ اس نسبت کا انحصار ا اور ب کے

مادوں کی قسموں پر ہو گا۔
ہم نے صرف ایک آسان صورت پر غور کیا ہے۔ اگر ہم کروں کو مناسب مقامات سے حرکت کرنے کے لئے چھوڑیں اور ایسا کرنے میں احتیاط سے کام لیں تو ہم دونو کروں کو پیچھے ہٹا کر اس طرح چھوڑ سکتے ہیں کہ ٹکر کے وقت دونو کرے اپنے اپنے راستوں کے پست ترین نقطوں پر ہوں۔ نیوٹن کا قانون ہر صورت میں صحیح ثابت ہو گا۔

امثلہ نمبری (۲۵)

(۱) ایک ذرہ جس کی کمیت ۵ پونڈ ہے ایک تین فٹ لمبی رسی کے ذریعہ لٹکتا ہے۔ رسی کا اوپر کا سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ اگر ذرے کو ۲۵ فٹ فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت دیجائے تو جب رسی (۱) افقی ہو جائے (۲) اوپر وار عمودی سمت میں ہو، ان دونوں وضعوں میں ذرے کی رفتار اور رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

(۲) سوال (۱) میں اگر یہ مقصود ہو کہ ذرہ عین پوری گردشیں کرے تو رفتار رمی کی اقل قیمت دریافت کرو اور یہ بھی بتاؤ کہ رسی کم سے کم کتنا وزن سہارنے کے قابل ہونی چاہیئے۔

(۳) ایک ۳ فٹ لمبی رسی کا ایک سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے اور اس کے دوسرے سرے سے م

کمیت کا ایک جسم بندھا ہے۔ جسم کو پکڑ کر رسی کو افقی وضع میں لاکر چھوڑ دیا گیا ہے۔ دریافت کرو کہ جب رسی شاقولی سمت میں ہوگی تو اس وقت اس کا تناؤ کیا ہوگا اور جسم کی رفتار کیا ہوگی؟

(۴) ایک چکنا حلقہ جس کا قطر ۹ فٹ ہے عمودی سطح میں رکھا گیا ہے۔ اس حلقے میں ایک منکا پرویا گیا ہے۔ اگر منکے کو حلقے کے بلند ترین نقطے سے نیچے کی طرف پھسلنے کے لئے چھوڑ دیا جائے تو اس کی رفتار دریافت کرو جبکہ وہ

(۱) پست ترین نقطے پر پہنچے

(۲) افقی قطر کے سرے پر پہنچے

(۳) سمت شاقولی میں قطر کا ایک ثلث طے کرے

(۴) کل محیط کا دو ثلث طے کرے۔

(۵) ایک وزنی ذرہ ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے۔ رسی کا طول ۱۰ فٹ ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ اب رسی کو ایک عمودی دائرے میں گھمایا جاتا ہے۔ اگر یہ مقصود ہو کہ ذرہ عین پوری گردشیں کرسکے تو دائرے کے پست ترین نقطے پر ذرے کی رفتار کیا ہوگی اور رسی کا تناؤ کیا ہوگا؟

(۶) دو عمودی رسیاں ایک توپ کو افقی وضع میں سہارتی ہیں۔ ہر ایک رسی کا طول ۹ فٹ ہے۔ اس توپ کے

ذریعہ ۳۶ پونڈ کمیت کا ایک گولہ چلایا جاتا ہے۔ گولے کے چلنے سے توپ پیچھے کو ہٹتی ہے اور عمودا ۲٫۲۵ فٹ اوپر وار جاتی ہے۔ تو گولے کی ابتدائی رفتار دریافت کرو اور یہ بھی دریافت کرو کہ گولے کے چلنے کے وقت رسیوں کا تناؤ کیا تھا۔ اور جس وقت توپ پیچھے ہٹ کر پہلی بار ساکن ہوئی اسوقت تناؤ کیا تھا؟

(۷) ایک چھوٹا وزنی حلقہ ایک رسی پر چڑھا ہوا ہے۔ رسی کا طول ۳۴ فٹ ہے اور اس کے دونو سرے دو ثابت نقطوں ا اور ب سے بندھے ہیں۔ ا اور ب کا درمیانی فاصلہ ۳۰ فٹ ہے اور خط ا ب افقی ہے۔ جب حلقہ ا سے ۵ فٹ ہے تو اس کو وہاں پکڑ کر رسی کو کس کر حلقے کو چھوڑ دیتے ہیں۔ ثابت کرو کہ جب حلقہ ۳ فٹ رسی طے کر چکتا ہے تو اس کی رفتار تقریباً ۱۰٫۱۲ فٹ فی ثانیہ ہوگی۔

(۸) ایک ذرہ ایک دائرے کی قوس پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔ ثابت کرو کہ دائرے کے پست ترین نقطے پر ذرے کی رفتار اس طرح بدلتی ہے جس طرح کہ قوس نزول کا وتر بدلتا ہے۔

(۹) ایک ذرہ ایک چکنے عمودی دائرے پر باہر کی طرف بلند ترین نقطے سے حالت سکون سے پھسلنا شروع کرتا ہے۔ دائرے پر سے اترنے کے بعد جس قطع مکانی میں ذرہ حرکت کریگا اس کا وتر خاص دریافت کرو۔

(۱۰) م کمیت کی ایک گولی ایک عمودی مدور چکنی نلی میں بلند ترین مقام پر پڑی ہے اور ۲ م کمیت کی ایک گولی نلی میں پست ترین مقام پر پڑی ہے۔ اب گولی م اوپر سے پھسلنا شروع کرتی ہے اور اندر ہی پھسلتے پھسلتے گولی ۲ م سے جاکر ٹکراتی ہے۔ اگر لچک کی قدر $\frac{۱}{۳}$ ہو تو دریافت کرو کہ ٹکر کے بعد گولیاں نلی کے اندر کہاں تک اوپر وار جائیں گی ؟

(۱۱) ہاتھی دانت کے دو مساوی گولے متوازی رسیوں کے ذریعہ لٹک رہے ہیں اس طرح کہ گولے مس کرتے ہیں اور ان کا خط مرکزین افقی ہے۔ ان نقطوں سے جہاں رسیاں بندھی ہیں خط مرکزین کا عمودی فاصلہ ۲ فٹ ہے۔ ان گولوں سے تجربہ کرنے سے معلوم ہوتا ہے کہ اگر ایک گولے کو ایسے مقام سے چھوڑیں جہاں کہ اس کی رسی کا میلان سمت عمودی سے °۶۰ ہے تو یہہ گولہ دوسرے گولے سے ٹکراکر اس کو حرکت دیتا ہے اور دوسرا گولہ اس حرکت سے $۶\frac{۳}{۴}$ انچ عموداً اوپر وار جاتا ہے۔ گولوں کی لچک کی قدر دریافت کرو۔

(۱۲) ایک دائرے کی قوس کے محاذی مرکز پر °۳۰ کا زاویہ بنتا ہے۔ یہہ قوس سطح عمودی میں اس طرح ثابت کردی گئی ہے کہ اس کا بلند ترین نقطہ اور اس کا مرکز ایک ہی افقی خط میں واقع ہیں۔

اب ایک ذرہ اس قوس کے بلند ترین مقام سے حالت سکون سے پھسلنا شروع کرتا ہے اور پھسلتے پھسلتے قوس پر سے اتر جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ قوس پر سے اترنے کے بعد جو قطع مکافی ذرے کی حرکت سے بنتا ہے اس کا وتر خاص قوس کے نصف قطر کا نصف ہے۔

(۱۳) ایک بے وزن بے لچک رسی کا طول ۲ ل ہے اور اس کے دونو سرے دو نقطوں ا اور ب سے بندھے ہیں فاصلہ اب طول میں ل کے مساوی ہے اور سمت میں افقی ہے۔ ایک جسم س جس کی کمیت م ہے رسی کے وسط میں بندھا ہے۔ اگر س کو سطح اس ب کی عمودی سمت میں پھینکا جائے اور رفتار رمی اس رفتار سے دو چند ہو جو پوری گردش کے لئے ضروری ہے تو رسی کا بڑے سے بڑا اور کم سے کم تناؤ دریافت کرو۔

جس وقت جسم س اپنے بلند ترین اور پست ترین مقامات کے عین درمیان ہو اگر اس وقت رسی کا ایک حصہ کاٹ دیا جائے تو حرکت کس طرح ہوگی؟

(۱۴) ایک مثمن منتظم کے سات ضلعوں کی شکل کی ایک نلی ہے۔ اس کے ہر ایک ضلع کا طول ا ہے۔ یہ نلی اس طرح رکھی ہے کہ اس کا ایک سرے کا ضلع سب سے نیچے ہے اور افقی ہے اور دوسرے سرے کا ضلع عمودی ہے ایک بے لچک ذرہ اس کے اندر سرے پر رکھدیا گیا ہے۔

یہہ ذرہ ایک رسی کے ذریعہ سے ایک دوسرے مساوی ذرے سے بندھا ہے جو سمت شاقولی میں لٹکتا ہے۔ ذروں کی رفتاریں اس وقت کیا ہونگی جب پہلا ذرہ نلی سے نکلیگا؟

(۱۵) اگر یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ زمین ایک کرہ ہے جس کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے تو ثابت کرو کہ خط استوا پر زمین کی گردش کی وجہ سے کسی جسم کا مرئی وزن بقدر $\frac{۱}{۱۸۹}$ کے کم ہو جائیگا۔ اگر خط استوا پر ایک ریل گاڑی ایک میل فی دقیقہ کی رفتار سے مشرق کی جانب جارہی ہو تو ثابت کرو کہ اس کا مرئی وزن بقدر ۰۰۴ء کے کم ہو جائے گا۔

(۱۶) ایک ذرہ ایک چکنے منحنی پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔ جب وہ عمودی فاصلہ ہی طے کرچکتا ہے تو اس کی رفتار محصلہ اس قدر ہوتی ہے کہ ن نصف قطر والے عمودی دائرے پر اندر کی طرف پوری گردشیں کر سکے (جیسا کہ مرکز گریز ریل گاڑی میں ہوتا ہے)۔ ثابت کرو کہ ۲ ہی لازماً ۵ ن سے بڑا ہوگا۔

(۱۷) دفعہ ۱۵۱ کے تجربہ میں کروں کی کمیت مساوی ہے اور وہ مساوی رسیوں کے ذریعہ سے لٹکتے ہیں۔ پہلا کرہ نیچے آنے میں ایک ایسی قوس طے کرتا ہے جس کا وتر لا ہے اور دوسرا کرہ ٹکر کے بعد اوپر وار جانے میں ایک ایسی قوس طے کرتا ہے جس کا وتر ما ہے۔ ثابت کرو کہ لچک کی قدر $\frac{\text{۲ما} - \text{لا}}{\text{لا}}$ ہو گی۔

(۱۸) ایک چھوٹی گولی ایک بے لچک رسی کے ایک سرے سے بندھی ہے اور رسی کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے و سے بندھا ہے۔ گولی کو پکڑ کر رسی کسی گئی ہے اس طرح کہ گولی کا عمودی فاصلہ و سے $۱\frac{۱}{۲}$ فٹ ہے۔ اب گولی کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔ اگر رسی کا طول ۳ فٹ ہو تو رسی کے دوبارہ کسنے کے عین بعد گولی کی رفتار معلوم کرو اور یہہ بھی دریافت کرو کہ و سے عموداً اوپر وار کتنے فاصلہ تک گولی جا سکے گی ؟

(۱۹) ایک ذرہ ایک چکنے عمودی دائرے پر اندر کی طرف حرکت کرنے کے لئے پھینکا گیا ہے۔ اس کی رفتار پست ترین نقطے پر $\frac{۱}{۵}\sqrt{۹۵\,ج\,ن}$ ہے جہاں ن دائرے کا نصف قطر ہے۔ ثابت کرو کہ جس وقت ذرہ دائرے کے اس نقطے پر پہنچیگا جس کا زاوئی فاصلہ بلند ترین مقام سے جتم$^{-۱}$ $\frac{۳}{۵}$ ہے اس وقت ذرے کی رفتار $\frac{۱}{۵}\sqrt{۱۵\,ج\,ن}$ ہوگی اور ذرہ دائرے پر سے اتر جائے گا۔

(۲۰) ایک گولی جس کی کمیت ۲۰۰ گرام ہے ۴۰۰ میٹر فی ثانیہ کی افقی رفتار سے حرکت کرتی ہوئی ایک مکعب کے پہلو کے عین مرکز میں لگتی ہے اور اس میں گھس جاتی ہے۔ مکعب کی کمیت ۲۰ کیلو گرام ہے اور وہ ایک رسی کے ذریعہ سے لٹکتا ہے۔ دریافت کرو کہ مکعب کس قدر فاصلے تک

عموداً اوپر وار جاکر ساکن ہو گا؟

(۲۱) ریت کے ایک صندوق کی کمیت ۲۰۰۰ پونڈ ہے اور وہ دو عمودی رسیوں کے ذریعہ سے لٹکتا ہے۔ ہر ایک رسی کا طول ۸ فٹ ہے ۲۰۰ پونڈ کمیت کا ایک گولہ افقی سمت میں اس طرح چلایا جاتا ہے کہ صندوق کے مرکز ثقل کی سیدھ میں لگے اور صندوق میں گھس جائے۔ اگر گولے کے لگنے سے صندوق کا مرکز ثقل ایک ایسی قوس میں حرکت کرے جس کا وتر ۶ فٹ ہے تو ثابت کرو کہ گولے کی رفتار ۱۲٫۱۲ فٹ فی ثانیہ ہے۔

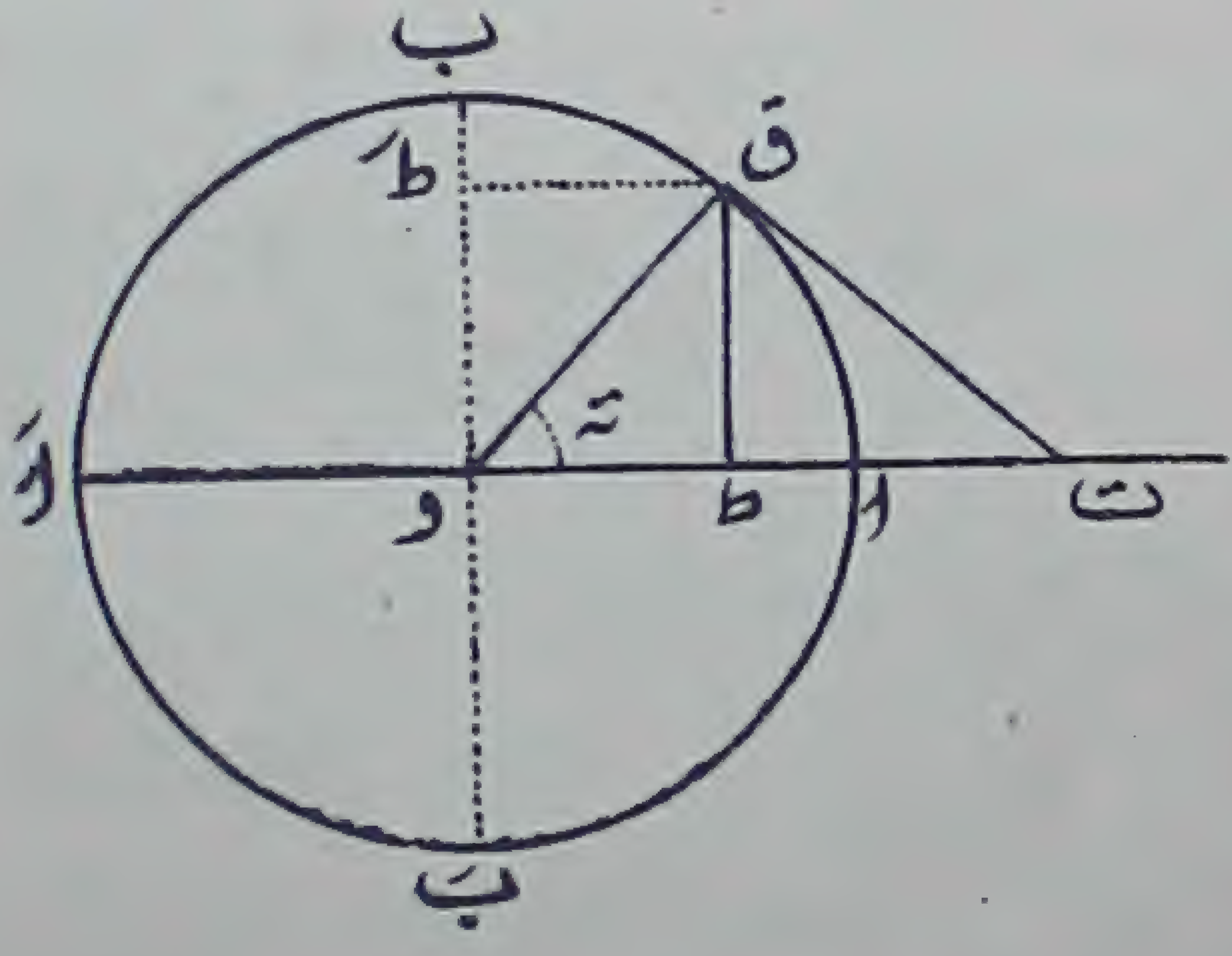
اگر گولے کی کمیت گ اور صندوق کی کمیت ص ہو اور ہر ایک عمودی رسی کا طول ل ہو اور قوس حرکت کا وتر ت ہو تو ثابت کرو کہ گولے کی رفتار $= \frac{\text{گ} + \text{ص}}{\text{گ}} \times \text{ت} \times \sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}$ ہو گی۔

[یہ اس سوال کی عام صورت ہے۔ اس کے ذریعہ سے ہم کسی گولے یا گولی کی رفتار معلوم کر سکتے ہیں۔ ت کی قیمت ہمیں تجربہ سے معلوم کرنی ہو گی]

باب یازدہم

بسیط موسیقی حرکت ۔ رقّاص

۱۵۲ ۔ مسئلہ ۔ اگر ایک نقطہ ق ایک دائرے پر یکساں زاوئی رفتار سے حرکت کرے اور دائرے کے ایک ثابت قطر ا و اَ پر ق سے عمود کھینچا جائے اگر اس عمود کا پایہ ہمیشہ ط ہو تو ثابت کروکہ ط کا اسراع دائرے کے مرکز و کی جانب ہوگا اور اس طرح بدلیگا جس طرح ط اور و کا درمیانی فاصلہ ۔ ساتھ ہی ط کی رفتار اور کسی فاصلے کو طے کرنے کی مدت بھی معلوم کرو ۔



فرض کرو کہ دائرے کا نصف قطر ن ہے اور فرض کرو کہ زاویہ ق و ا' تہ ہے۔ نقطہ ق پر مماس ق ت کھینچو جو و ا' سے ت پر ملے۔ فرض کرو کہ دائرے پر ق کی یکساں زاویئی رفتار ھ ہے۔ جو عمود کہ ق سے اا' پر کھینچا جاتا ہے، ط ہمیشہ اس عمود کے پایہ پر رہتا ہے۔ اس لئے ط کی رفتار وہی ہوگی جو ق کی رفتار کا جزء تحلیلی ا و کی سمت میں ہے اور ط کا اسراع بھی ق کے اسراع کے جزء تحلیلی کے مساوی ہوگا جو سمت ا و میں لیا جائے۔

بموجب دفعہ ۱۳۵ نتیجہ صریح (۱) ق کا اسراع ھ^{2}ن ہے اور اس کی سمت ق و ہے۔

اس لئے ط کا اسراع ط و کی سمت میں = ھ^{2}ن جم تہ = ھ^2 × و ط
یعنے ط کا اسراع اس طرح بدلتا ہے جس طرح ط کا فاصلہ مرکز دائرہ سے۔

اور ط کی رفتار

= ن ھ جم ق ت و = ن ھ جب تہ = ھ ط ق = ھ $\sqrt{\text{ن}^2 - \text{لا}^2}$ ....(۱)

جہاں و ط = لا

یہہ رفتار ا اور ا' پر صفر ہے اور اس کی بڑی سے بڑی قیمت و پر ہوتی ہے۔

جب ط، و میں سے گذرتا ہے تو اسراع معدوم

ہو جاتا ہے اور اپنی علامت بدل لیتا ہے۔

اس لئے نقطہ ط، ا پر ساکن ہوتا ہے یعنی اس کی رفتار ا پر صفر ہوتی ہے لیکن اس کے اسراع کی قیمت ا پر بڑی سے بڑی ہوتی ہے۔ ا سے چل کر جب نقطہ و پر پہنچتا ہے تو اس کا اسراع تو صفر ہوتا ہے لیکن اس کی رفتار کی قیمت بڑی سے بڑی ہوتی ہے۔ جب ط، اَ پر پہنچتا ہے تو پھر وہ ساکن ہوتا ہے یعنی اس کی رفتار صفر ہوتی ہے اور اس کا اسراع یہاں پھر قیمت اعظم رکھتا ہے اور ط اسی راستے سے ا پر واپس آتا ہے۔

اب وقت کا شمار کرو۔

وہ مدت جو کوئی فاصلہ اط طے کرنے میں لگتی ہے مساوی ہے اس وقت کے جو نقطہ ق قوس اق طے کرنے

میں صرف کرتا ہے اور یہہ وقت $= \frac{\text{تہ}}{\text{ھ}} = \frac{1}{\text{ھ}}\,\text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{لا}}{\text{ن}}\right)$ ......(۲)

اس لئے ا سے اَ تک جانے کی مدت

$$= \frac{1}{\text{ھ}}\,\text{جم}^{-1}(-1) = \frac{\pi}{\text{ھ}}$$

اور ا سے اَ تک جانے اور پھر اَ سے ا تک واپس آنے کی مدت $= \frac{2\pi}{\text{ھ}}$ ....(۳)

۱۵۳۔ بسیط موسیقی حرکت۔ تعریف۔ اگر ایک

نقطہ ایک خط مستقیم میں اس طرح حرکت کرے کہ اس کے اسراع کی سمت ہمیشہ اس خط مستقیم کے ایک ثابت نقطے کی سیدھ میں ہو اور اس اسراع کی مقدار ہمیشہ اس طرح بدلے جس طرح متحرک نقطے کا فاصلہ ثابت نقطے سے بدلتا ہے تو اس حرکت کو بسیط موسیقی حرکت کہتے ہیں۔ دفعہ سابقہ میں ط کی حرکت بسیط موسیقی حرکت ہے۔

اگر ہم ھ² کو مہ کے مساوی فرض کریں تو دفعہ سابقہ کے نتائج (۱)، (۲) و (۳) سے ظاہر ہے کہ اگر ایک نقطے ط کی حرکت بسیط موسیقی حرکت ہو اور اگر وہ حالت سکون سے ایسے مقام سے حرکت شروع کرے جس کا فاصلہ ثابت نقطے و سے ن ہے اور اس کا اسراع مہ × و ط ہے تو

(۱) اس کی رفتار ایسے مقام پر جس کا فاصلہ ثابت نقطے سے لا ہے

$$\text{مہ}\sqrt{\text{ن}^2 - \text{لا}^2} \quad \text{ہوگی}$$

(۲) اس مقام تک پہنچنے میں مدت $\frac{1}{\sqrt{\text{مہ}}}\,\text{جم}^{-1}\frac{\text{لا}}{\text{ن}}$ صرف ہوگی

(۳) مقام ابتداء حرکت پر واپس پہنچنے کے لئے مدت

$$\frac{2\pi}{\sqrt{\text{مہ}}} \quad \text{صرف ہوگی}$$

فاصلہ و ا یا و اَ کو جو مرکز و سے ایک طرف یا دوسری طرف نقطہ ط طے کرتا ہے حرکت کی سعت کہتے ہیں۔
جب نقطہ ایک مقام سے گزر کر پھر اسی مقام پر اسی سمت میں اسی رفتار سے حرکت کرتا ہوا پہنچے تو جو وقت اس دوران میں گزرا اس کو حرکت کی مدت یا مدت اہتزاز کہتے ہیں۔

واضح رہے کہ حرکت کی مدت، $\frac{۲ط}{\sqrt{م}}$ کا انحصار حرکت کی سعت پر نہیں ہے۔

۱۵۴۔ دفعہ گذشتہ کے نتیجہ (۲) سے ظاہر ہے کہ اگر ت وہ وقت ہو جو متحرک نقطے کو فاصلہ ن سے حالت سکون سے چل کر فاصلہ لا تک پہنچنے میں لگتا ہے تو

$$لا = ن \, جم \left(\sqrt{م} \, ت \right)$$

اب نتیجہ (۱) کے ذریعہ سے

$$رفتار = \sqrt{م \left[ن^{۲} - ن^{۲} \, جم^{۲} \left(\sqrt{م} \, ت \right) \right]}$$

۱۵۵۔ بسیط موسیقی حرکت کی مثالیں۔ طبیعیات اور علم حیلی کے مسائل میں یہہ حرکت اکثر وقوع پذیر ہوتی ہے۔
سر کے دو شاخے کے کسی نقطے کی حرکت اور بیلے کے تار کے کسی نقطے کی حرکت یہی ہوتی ہے جبکہ ان کی

حرکت میں اہتزاز ہو۔ ایک رقاص کی حرکت (دفعہ ۱۵۸) بھی بسیط موسیقی ہے جبکہ اس کی حرکت کا زاویہ چھوٹا ہو۔ اگر ایک جسم ایک لچکدار رسی کے ذریعہ سے لٹک رہا ہو یا کسی کمانی سے بندھا ہو اور خط عمودی میں اہتزاز کرے تو یہ بھی بسیط موسیقی حرکت ہوگی۔ مخروطی رقاص (دفعہ ۱۴۰) کے گردش کرنے والے جسم کی حرکت بھی بسیط موسیقی نظر آئے گی اگر اس کو ایک ایسے نقطے سے دیکھا جائے جو جسم کی گردش کی سطح میں واقع ہو لیکن بہت دور ہو۔ مشتری کے توابع کی حرکت بھی بسیط موسیقی معلوم ہوگی اگر ان کی سطح کے کسی ایسے نقطے سے ان کو دیکھا جائے جو بہت دور واقع ہو۔

عموماً جن لچکدار جسموں میں قوت، نقل مکان کے متناسب ہوتی ہے ان کی حرکت بسیط موسیقی ہوتی ہے۔

۱۵۶ــ مثال (۱) ایک نقطے کی حرکت بسیط موسیقی ہے اس کی مدت ۴ ثانیہ ہے۔ اگر وہ اپنے طریق کے مرکز سے ۴ فٹ کے فاصلے سے حالت سکون سے حرکت شروع کرے۔ دریافت کرو کہ ۲ فٹ فاصلہ طے کرنے میں کتنا وقت صرف ہوگا اور ۲ فٹ طے کرنے کے بعد رفتار کیا ہوگی؟

اگر اسراع فاصلے کا μ گنا ہو تو

$$\frac{۲\pi}{\sqrt{\mu}} = ۴$$

$$\therefore \text{مہ} = \left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۲}$$

جب نقطہ ۲ فٹ طے کر چکتا ہے تو اس وقت وہ اپنے مرکزِ حرکت سے ۲ فٹ کے فاصلے پر ہوتا ہے۔ اس لئے بموجب دفعہ (۱۵۳) نتیجہ (۲) جو وقت گزرا وہ

$$= \frac{۱}{\sqrt{\text{مہ}}}\ \text{جم}^{-۱}\frac{\text{لا}}{\text{ن}} = \frac{۱}{\frac{\pi}{۲}}\ \text{جم}^{-۱}\left(\frac{۲}{۴}\right)$$

$$= \frac{۲}{\pi} \times \frac{\pi}{۳} = \frac{۲}{۳}\ \text{ثانیہ}$$

اور بموجب دفعہ (۱۵۳) نتیجہ (۱)

$$\text{رفتار} = \sqrt{\text{مہ}\,(\text{ن}^{۲} - \text{لا}^{۲})} = \sqrt{\left(\frac{\pi}{۲}\right)^{۲}(۴^{۲} - ۲^{۲})} = \pi\sqrt{۳}\ \text{فٹ فی ثانیہ}$$

مثال (۲) ایک نقطہ جس کی حرکت بسیط موسیقی ہے اپنی حرکت کے مرکز سے ۱۶ فٹ کے فاصلے سے چلتا ہے۔ اگر ابتداءِ حرکت میں اسراع ۴ فٹ ثانیہ اکائیاں ہو تو دریافت کرو (۱) اس کی رفتار جب وہ مرکز سے ۸ فٹ کے فاصلے پر ہو اور جب وہ مرکز میں سے گزرے (۲) اس کی مدت۔

(۱) فرض کرو کہ اسراع فاصلے کا مہ گنا ہے۔ تو

$$\text{مہ} \times ۱۶ = ۴ \qquad \text{یعنی}\ \text{مہ} = \frac{۱}{۴}$$

اس لئے بموجب دفعہ (۱۵۳) نتیجہ (۱)

اس کی رفتار جب وہ مرکز سے ۸ فٹ ہو

$$= \sqrt{\frac{۱}{۴}(۱۶^{۲} - ۸^{۲})} = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}\ \text{فٹ فی ثانیہ}$$

اور اسکی رفتار جب وہ مرکز میں سے گزرتا ہے

$$= \sqrt{\frac{۱}{۴} \times ۱۶^{۲}} = ۸$$ فٹ فی ثانیہ

(۲) اس کی مدت = $\frac{2\pi}{\sqrt{\frac{۱}{۴}}} = ۴\pi = ۱۲\frac{۴}{۷}$ ثانیہ تقریباً

مثال (۳) ایک ہلکی لچکدار کمانی کا اصلی طول ط سینٹی میٹر ہے۔ اور اس کی لچک کا مقیاس ن گرام وزن کے مساوی ہے۔ اس کمانی کا ایک سرا ایک ثابت نقطے سے باندھکر دوسرے سرے سے م گرام کمیت کا ایک جسم لٹکا دیا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ جسم کے عمودی اہتزاز کی مدت

$$2\pi \sqrt{\frac{ط}{ج} \times \frac{م}{ن}}$$ ہوگی۔



فرض کرو کہ کمانی کا ثابت سرا و ہے اور و ا اس کی اصلی وضع ہے۔ یعنی وہ وضع ہے جبکہ اس کے طول میں فرق نہیں آیا۔ فرض کرو کہ و ب = ﻻ اور فرض کرو کہ جب جسم ب پر ہے تو کمانی کا تناؤ ت ہے۔ تو بموجب قانون ہک

ت = ل $\frac{ﻻ - ط}{ط}$ جہاں ل لچک کا مقیاس ہے

$$= ن\ ج\ \frac{ﻻ - ط}{ط}$$

اس لئے جسم پر اوپر کی طرف حاصل قوت

$$= \text{ت} - \text{م ج}$$

$$= \text{ن ج}\,\frac{\text{ل} - \text{ط}}{\text{ط}} - \text{م ج} = \frac{\text{ن ج}}{\text{ط}}\left[\text{ل} - \frac{(\text{م}+\text{ن})\text{ط}}{\text{ن}}\right]$$

فرض کرو کہ و میں سے گذرنے والے عمودی خط پر وَ ایک

ایسا نقطہ ہے کہ $\text{و وَ} = \frac{(\text{م}+\text{ن})\text{ط}}{\text{ن}}$

پس اوپر کی طرف جسم پر قوت

$$= \frac{\text{ن ج}}{\text{ط}}\left[\text{و ب} - \text{و وَ}\right]$$

$$= \frac{\text{ن ج}}{\text{ط}} \times \text{وَ ب}$$

لہذا جسم کا اسراع اوپر کی طرف $= \frac{\text{ن ج}}{\text{م ط}} \times \text{وَ ب}$

یعنی جسم کی حرکت بسیط موسیقی ہے اور اس کا مرکز وَ ہے۔
اور بموجب دفعہ ۱۵۳

مدت اہتزاز $= ۲\pi \div \sqrt{\frac{\text{ن ج}}{\text{م ط}}} = ۲\pi\sqrt{\frac{\text{م ط}}{\text{ن ج}}}$

واضح رہے کہ وَ وہ مقام ہے جہاں جسم حالت سکون میں لٹکے گا۔ کیونکہ اگر جسم وَ پر ہو تو کمانی کا تناؤ اوپر

کی طرف یہہ ہو گا:-

$$\text{ن ج} \times \frac{\text{وَوَ} - \text{ط}}{\text{ط}} = \text{ن ج} \left[\frac{\frac{(\text{م}+\text{ن})\text{ط}}{\text{ن}} - \text{ط}}{\text{ط}} \right] = \text{م ج}$$

اور یہہ جسم کے وزن کے مساوی ہے۔ اس لئے وَ پر جسم حالت تو ازن میں ہو گا۔

امثلہ نمبری (۲۶)

(۱) ایک ذرہ ایک خط مستقیم میں بسیط موسیقی حرکت کرتا ہے۔ ایک سکون سے دوسرے سکون تک مدت دریافت کرو جبکہ

(۱) ۲ فٹ کے فاصلے پر اسراع ۴ فٹ ثانیہ اکائیاں ہو۔

(۲) ۳ انچ کے فاصلے پر اسراع ۹ فٹ ثانیہ اکائیاں ہو۔

(۳) ایک فٹ کے فاصلے پر اسراع π^2 فٹ ثانیہ اکائیاں ہو

(۲) سوال (۱) کی ہر ایک صورت میں دریافت کرو کہ جب ذرہ اپنے راستے کے مرکز میں سے گذرتا ہے تو اس کی رفتار کیا ہوگی۔ حرکت کی سعتیں بالترتیب ۲ فٹ، ۳ انچ، ایک فٹ ہیں۔

(۳) ایک ذرہ ایک خط مستقیم میں بسیط موسیقی حرکت کرتا ہے۔ اس کی مدت اہتزاز ایک صورت میں ۲ ثانیہ دوسری میں $\frac{1}{16}$ ثانیہ اور تیسری میں π ثانیہ ہے لیکن ہر صورت میں

سعت ایک فٹ ہے۔ مرکز حرکت میں سے گذرنے کے وقت ذرے کی رفتار ہر صورت میں دریافت کرو۔

(۴) ایک ذرے کی حرکت بسیط موسیقی ہے اور جب وہ مرکزِ طریق میں سے گذرتا ہے اس کی رفتار ۴ فٹ فی ثانیہ ہے اور اس کی مدت اہتزاز π ثانیہ ہے۔ اگر وہ حالت سکون سے چلے تو ایک فٹ کا فاصلہ کتنے وقت میں طے کریگا؟

(۵) ایک نقطے کی حرکت بسیط موسیقی ہے۔ اگر مرکزِ طریق سے ۳ فٹ اور ۴ فٹ کے فاصلوں پر اس کی رفتاریں بالترتیب ۸ فٹ اور ۶ فٹ فی ثانیہ ہوں تو دریافت کرو کہ اس کی مدت اہتزاز کیا ہوگی اور مرکز طریق سے فاصلۂ اعظم پر اس کا اسراع کیا ہوگا؟

(۶) ایک گرام کمیت کا ایک جسم اپنے طریق کے مرکز کے دونو طرف ایک ایک ملی میٹر تک اہتزاز کرتا ہے اور یہہ اہتزازی حرکت ایک ثانیہ میں ۲۵۶ دفعہ ہوتی ہے۔ یہہ تسلیم کرکے کہ حرکت بسیط موسیقی ہے ثابت کرو کہ ذرے پر قوت اعظم $\frac{1}{10}$ (۵۱۲ π)² ڈائین ہے۔

(۷) ایک افقی تختی خط عمودی میں بسیط موسیقی حرکت کرتی ہے اور اس کی مدت اہتزاز ایک ثانیہ ہے۔ اگر یہہ مقصود ہو کہ تختی پر جو اشیا پڑی ہیں وہ اس کے ساتھ مس کرتی رہیں تو معلوم کرو کہ بڑی سے بڑی سعت سینٹی میٹروں میں

کیا ہو سکتی ہے ؟

(۸) ۱۲ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک ہلکی کمانی کے ذریعہ سے لٹک رہا ہے۔ کمانی ایسی ہے کہ اگر اس کے تناؤ میں ایک پونڈ وزن کا اضافہ کیا جائے تو اس کے طول میں ایک انچ کا اضافہ ہوگا۔ اگر کمانی کا اوپر کا سرا فی الفور ۴ انچ اٹھاکر ثابت کردیا جائے تو ایسا کرنے سے جسم کی جو حرکت ہوگی اس کی سعت اور مدت اہتزاز دریافت کرو۔

(۹) ایک ہلکی کمانی کے ایک سرے سے ایک وزن بندھا ہے اور اس کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ وزن کو باندھکر چھوڑ دیا گیا ہے۔ اگر یہہ عمودی خط میں اہتزاز کرے اور سعت ۶ انچ ہو تو مدت اہتزاز معلوم کرو۔

(۱۰) ایک لچکدار رسی کے وسط سے ایک ذرہ باندھ دیا گیا ہے۔ رسی کو کھینچ کر اس کا طول اصلی طول سے دوچند کیا گیا ہے اور اسی وضع میں ایک میز پر رکھکر رسی کے دونو سرے ثابت کردئے گئے ہیں۔ اب ذرے کو رسی کی سمت میں اپنی جگہ سے ہٹاکر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ذرے کی مدت اہتزاز دریافت کرو۔

(۱۱) ایک سلاخ اب اس طرح حرکت کرتی ہے کہ اس کا سرا ب یکساں چال ر سے ایک دائرے پر حرکت کرتا ہے جس کا مرکز و ہے اور سلاخ کا سرا ا ایک ایسے خط مستقیم پر حرکت کرتا ہے جو نقطہ و میں سے گزرتا ہے۔

اگر اب = ب و = ن اور او = لا تو ثابت کرو کہ

ا کی رفتار $\frac{ر\sqrt{۴ن^{۲} - لا^{۲}}}{ن}$ ہے اور اس کی حرکت

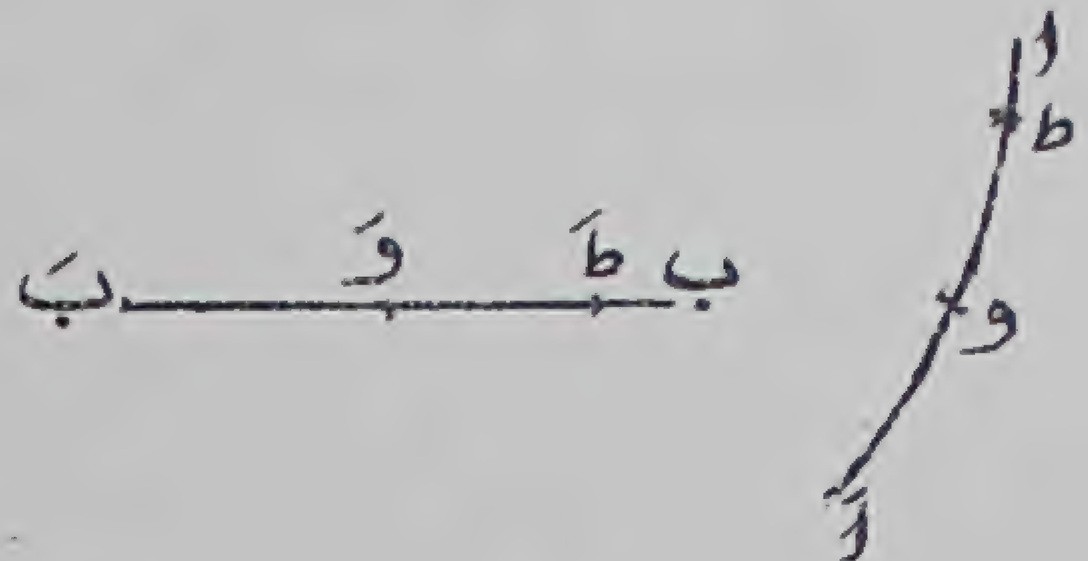
بسیط موسیقی ہے۔

[اس سوال سے ظاہر ہے کہ ہم عملاً بسیط موسیقی حرکت حاصل کر سکتے ہیں۔ فرض کرو کہ وب ایک گردش کرنے والی سلاخ ہے اور یہہ ایک اور سلاخ اب سے وصل کی گئی ہے۔ فرض کرو کہ بھاپ کے انجن کے فشارہ کی طرح ا کو ایک مستقیم خط وا پر چلایا جاتا ہے تو ا کی حرکت بسیط موسیقی ہوگی]

۱۵۷- بسیط موسیقی حرکت کے مسئلہ کی توسیع۔ منحنی پر حرکت۔

فرض کرو کہ متحرک نقطہ ط کسی شکل کے ایک منحنی کے حصے او اَ پر اس طرح حرکت کرتا ہے کہ وہ ا سے حالت سکون سے شروع ہوتا ہے اور اس کا مماسی اسراع ہمیشہ قوس کی سمت میں ہے اور و کی جانب ہے اور مقدار میں مہ × قوس وط کے مساوی ہے تو دفعہ ۱۵۳ کے تمام نتائج اس صورت میں بھی صحیح ہونگے۔

صرف ان میں تھوڑی سی تبدیلی کرنی ہوگی۔



فرض کرو کہ وَب ایک خط مستقیم ہے جو طول میں قوس و ا کے مساوی ہے اور فرض کرو کہ نقطہ طَ خط مستقیم وب میں اس طرح حرکت کرتا ہے کہ اس کا اسراع مہ × وَطَ ہے اور فرض کرو کہ وَطَ = قوس وط۔

چونکہ طَ کا اسراع اس کے طریق میں ہمیشہ وہی ہے جو ط کا اسراع ہے اس لئے جو رفتاریں ط اور طَ ایک ہی مدت میں حاصل کرتے ہیں وہ بھی مساوی ہونگی اور مساوی فاصلے طے کرنے کے اوقات بھی مساوی ہونگے۔

پس

(۱) ط کی رفتار = طَ کی رفتار

$$= \sqrt{\text{مہ}\ (\text{وَبَ}^2 - \text{وَطَ}^2)} = \sqrt{\text{مہ}\ \{(\text{قوس وا})^2 - (\text{قوس وط})^2\}}$$

(۲) ا سے ط تک جانے کا وقت = بَ سے طَ تک جانے کا وقت

$$= \frac{1}{\sqrt{م}} \text{جم}^{-1}\left(\frac{وط}{وب}\right) = \frac{1}{\sqrt{م}} \text{جم}^{-1}\left(\frac{\text{قوس وط}}{\text{قوس وا}}\right)$$

(۳) اسے ا تک اور پھر واپس ا تک جانے کی مدت $= \frac{۲\pi}{\sqrt{م}}$

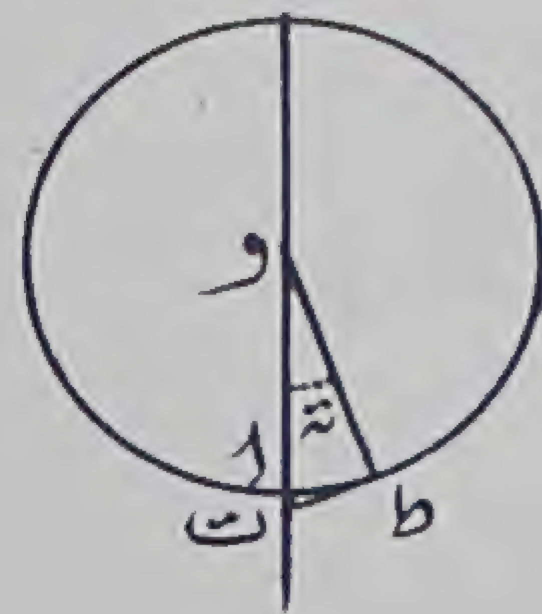
رقاص

۱۵۸- بسیط رقاص- اگر ایک ذرہ ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہو اور رسی کا دوسرا سرا ایک ثابت نقطے سے بندھا ہو اور ذرہ ایک ایسے عمودی دائرے میں اہتزازی حرکت کرے جس کا مرکز وہ ثابت نقطہ ہو تو اسے بسیط رقاص کہتے ہیں۔

مدت اہتزاز کا انحصار زاویۂ اہتزاز پر ہے

ہم آئندہ دفعہ میں ثابت کرینگے کہ اگر زاویہ اہتزاز چھوٹا ہو تو رقاص کی مدت اہتزاز تقریباً مستقل رہتی ہے۔

۱۵۹- مسئلہ- اگر ایک ذرہ رسی کے ذریعہ سے ایک ثابت نقطے سے لٹک رہا ہو اور اسکو ایک چھوٹے زاوئے میں اہتزازی حرکت دی جائے تو ثابت کرو کہ مدت اہتزاز $۲\pi\sqrt{\frac{ل}{ج}}$ ہے جہاں ل رسی کا طول ہے۔



فرض کرو کہ و ثابت نقطہ ہے اور و ا ایک عمودی خط ہے اور فرض کرو کہ ا ط وہ قوس ہے جس پر ذرہ چلتا ہے۔
اور فرض کرو کہ زاویہ ا و ط = تہ
فرض کرو کہ ط پر مماس ط ت ہے جو و ا سے ت پر ملتا ہے۔ تو ذرے کا اسراع ط ت کی سمت میں = ج جب تہ
= ج تہ تقریباً اگر تہ چھوٹا ہو

$$= \frac{\text{ج}}{\text{ل}} \times \text{قوس اط}$$

اس سے ظاہر ہے کہ مماس کی سمت میں اسراع اس طرح بدلتا ہے جس طرح پست تریں نقطے سے ذرے کا قوسی فاصلہ بدلتا ہے۔
پس ثابت ہوا کہ حرکت بسیط موسیقی ہے لہذا بموجب دفعہ (۱۵۷) نتیجہ (۳)

$$\text{مدت اہتزاز} = \frac{2\pi}{\sqrt{\frac{\text{ج}}{\text{ل}}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$$

اس نتیجہ سے یہہ بھی ظاہر ہے کہ مدت اہتزاز زاویہ اہتزاز پر منحصر نہیں ہے۔

پہلے پہل گلیلیو نے ۱۵۸۲ء کے قریب یہہ دریافت کیا کہ رقاص کی مدت اہتزاز مستقل رہتی ہے۔ اس نے دیکھا کہ پائی سا کے گرجے میں جو پیتل کا بڑا لیمپ لٹکتا ہے وہ جب جھولتا ہے تو خواہ وہ کسی زاوئے میں جھولے جھولنے کی مدت ایک ہی رہتی ہے۔ گلیلیو نے وقت کا اندازہ اپنی نبض کے ذریعہ سے لگایا تھا۔

مثال ۔ ایک ایسے رقاص کا طول معلوم کرو جو ۵۵ ثانیہ میں ۵۶ دفعہ جھولے۔

یہاں مدت اہتزاز = $\frac{55}{56}$ ثانیہ

پس اگر رقاص کا طول ل ہو تو

$$\frac{55}{56} = \pi\sqrt{\frac{ل}{ج}} = \frac{22}{7}\sqrt{\frac{ل}{32}}$$

$$\therefore \sqrt{\frac{ل}{32}} = \frac{5}{16}$$

$$\therefore ل = \frac{25}{256} \times 32 = \frac{25}{8} \text{ فٹ } = 37\frac{1}{2} \text{ انچ}$$

۱۶۰ ۔ **تجربی تصدیق** ۔ دفعہ گذشتہ کے اہم نتیجے کی اچھی خاصی تصدیق تجربہ سے ہوسکتی ہے۔ طالب علم کو واضح رہے کہ نظری حسابات کا " ذرہ " عملاً تو ہمیں حاصل

نہیں ہو سکتا اور نہ ایسی رسی ہی مل سکتی ہے جو بالکل "بے وزن" ہو۔ لیکن اگر ہم پیتل یا کسی اور دھات کی چھوٹی سی گولی لیں اور اس میں ایک چھوٹا سا کانٹا مضبوط جڑکر ریشم کے ایک ہلکے باریک ڈورے کے ذریعہ سے گولی کو لٹکا دیں تو قریب قریب بسیط رقاص بن جائے گا۔

اول ۔ تجربہ سے ثابت کرو کہ مدت اہتزاز اس طرح بدلتی ہے جس طرح طول کا جذر ۔

بہت سی ایسی گولیاں لو اور ان سے ڈورے باندھکر ثابت نقطوں سے لٹکاؤ۔

یہہ اس طرح سے کرنا مناسب ہوگا۔ ایک ثابت افقی تختی میں چھوٹے چھوٹے حلقے پیچوں سے جڑدو۔ ڈورے ان حلقوں میں سے گذار کر کسی موزوں سہارے سے باندھو۔ ڈوروں کے طول ایسے رکھو کہ اگر گولیوں کے مرکزوں سے نقاطِ تعلیق تک فاصلے ناپے جائیں تو وہ ۱، ۴، ۹، ۱۶، .... کی نسبتوں میں ہوں ۔ [مثلاً یہہ طول رکھے جا سکتے ہیں :۔ ۶ انچ ، ۲ فٹ ، ۴ فٹ ۶ انچ ، ۸ فٹ ، ....] اب گولیوں کو ایسی حرکت دو کہ سب ایک ہی وقت چھوٹے زاویوں میں جھولنا شروع کریں۔ دیکھنے سے معلوم ہوگا کہ ان کے جھولنے کی مدتیں ۱، ۲، ۳، ۴، ...... کی نسبتوں میں ہیں۔ یعنی طولوں کے جذروں کی نسبتوں میں ہیں ۔

اگر تجربہ کرنے والا صرف دو دو گولیوں کو ایک وقت

حرکت دے تو نتیجہ زیادہ آسانی سے حاصل ہو گا۔ مثلاً اگر پہلی اور دوسری کو ایک ساتھ حرکت دی جائے تو معلوم ہوگا کہ پہلی کی مدت دوسری کی مدت سے نصف ہے یعنی جتنی دیر میں دوسری ایک دفعہ جھولتی ہے اتنی دیر میں پہلی دو دفعہ جھولتی ہے۔

اسی طرح اگر پہلی اور تیسری کو ایک ساتھ حرکت دی جائے تو معلوم ہوگا کہ جتنی دیر میں تیسری ایک بار جھولتی ہے اتنی دیر میں پہلی تین بار جھولتی ہے یعنی جب وقت تیسری گولی کا ایک پینگ ختم ہوگا اس وقت پہلی گولی کا تیسرا پینگ ختم ہوگا۔

اسی طرح باقی گولیوں سے نتائج حاصل ہونگے۔

دوم تجربہ سے ثابت کرو کہ پینگ کی مدت کا انحصار گولی کی نوع مادہ پر نہیں ہے۔

دو چھوٹے گولے لو جو ناپ میں تو ایک سے ہوں لیکن مختلف اشیاء کے بنے ہوے ہوں یہ یاد رہے کہ کاک جیسی ہلکی چیز کے بنے ہوئے نہ ہوں۔ جیسا کہ پہلے تجربے میں بیان ہوا ہے اسی طرح ان گولوں کو مساوی طول کی رسیوں کے ذریعہ سے لٹکاؤ اور ان کو ایک ساتھ جھولنے کے لئے حرکت دو۔ یہہ اس طرح ہوسکتا ہے کہ ایک تختی کے ذریعہ سے گولوں کو ایک طرف دھکیلو اور پھر تختی کو فوراً پیچھے ہٹالو۔ ایسا کرنے سے معلوم

ہوگا کہ گولوں کے پینگوں کی مدتیں مساوی ہیں لیکن یہہ نتیجہ اسی صورت میں حاصل ہو سکتا ہے جب کہ رسیوں کے طول احتیاط سے مساوی بنائے جائیں۔ کچھ وقت گذرنے کے بعد ہلکے گولے پیچھے رہتے جائیں گے۔ اسکی وجہ یہہ ہے کہ ہوا کی مزاحمت کا اثر ہلکے گولوں پر زیادہ ہے اور بھاری گولوں پر کم ہے۔

سوم۔ بسیط رقاص کے ذریعہ سے **ج** کی قیمت دریافت کرو۔

ایک گولہ لو اور اسکو مناسب طول (مثلاً ۲ فٹ) کی ایک رسی کے ذریعہ سے لٹکاؤ۔ نقطہ تعلیق سے گولے کے مرکز تک فاصلہ احتیاط سے ناپ لو۔ اب گولے کو جھولنے کے لئے حرکت دو۔ اور ایک پورے پینگ کی مدت و معلوم کرو۔ مدت معلوم کرنے کا بہترین طریقہ یہہ ہے کہ بہت سے (مثلاً ۴۰) پینگوں کا وقت دیکھو اور اس وقت کو ۴۰ پر تقسیم کرو۔ [ایک معمولی گھڑی کے ذریعہ سے جس میں ثانیہ کی سوئی ہو اچھے خاصے صحیح نتائج حاصل ہو سکتے ہیں]

لیکن بموجب دفعہ ۱۵۹

$$\text{مدت} = ۲\pi\sqrt{\frac{ط}{ج}}$$ جہاں ط طول ہے

$$\text{یعنی } و = ۲\pi\sqrt{\frac{ط}{ج}}$$

ہمیں و اور ط دونو معلوم ہیں

$$\therefore \; ج = ۴\pi^۲ \frac{ط}{و^۲}$$

بذریعہ جدول لوکارثم یا معمولی حساب سے ہم ج کی قیمت فٹ ثانیہ اکائیوں میں دو درجہ اعشاریہ تک صحیح معلوم کر سکتے ہیں۔

اگر طول سینٹی میٹروں میں ناپا جائے تو ہم کو ج کی قیمت س گ ث نظام میں معلوم ہو گی۔

۱۶۱۔ ثانیہ کا رقاص۔ جس رقاص کی مدت اہتزاز سکون سے سکون تک ایک ثانیہ ہو یعنی جس کے پورے پینگ کا نصف ایک ثانیہ میں ہو اسے ثانیہ کا رقاص کہتے ہیں۔

پس اگر اس کا طول ط ہو تو

$$۱ = \pi \sqrt{\frac{ط}{ج}}$$

$$\therefore \; ط = \frac{ج}{\pi^۲} \; فٹ$$

چونکہ زمین کے مختلف مقامات پر ج کی قیمت مختلف ہے اس لئے یہہ ظاہر ہے کہ ثانیہ کے رقاص کا طول زمین کے مختلف مقامات پر مختلف ہو گا۔

اگر $ج = ۳۲٫۲$ اور $\pi = \frac{۲۲}{۷}$

تو ط = ۳۰۲۶ فٹ = ۳۹۰۱۲ انچ تقریباً
اگر ہم اکائیوں کا س گ ث نظام استعمال کریں تو ج=۹۸۱
اس لئے ط = ۹۹۰۳ سنیٹی میٹر
لندن کے عرض بلد میں ثانیہ کے رقاص کے طول کی صحیح تر قیمتیں ۳۹۰۱۳۹۲۹ اور ۹۹۰۴۱۳ سنیٹی میٹر ہیں۔

امثلہ نمبری (۲۷)

[مفصلہ ذیل سوالات میں π = ۲۲/۷]

(۱) اگر ج = ۳۲۰۲ تو ۲۰۵ ثانیہ میں جھولنے والے رقاص کا طول معلوم کرو۔

(۲) ایک مقام پر ایک رقاص کے پورے پینگ کی مدت ۱۶ ثانیہ ہے۔ رقاص کا طول ۶۴ میٹر ہے۔ ثابت کرو کہ ج کی قیمت سنیٹی میٹر ثانیہ اکائیوں میں ۹۸۷ ہے۔

(۳) ۳ فٹ طول کا ایک رقاص ۱۷۶ ثانیہ میں ۷۰۰ بار جھولتا ہے ج کی قیمت معلوم کرو۔

(۴) ثانیہ کے ایک رقاص کی لمبائی ۳۹۰۱۲ انچ ہے۔ ان رقاصوں کے طول معلوم کرو جو (۱) نصف ثانیہ میں (۲) ربع ثانیہ میں (۳) ۲ ثانیہ میں جھولیں۔

(۵) ایک مقام پر ج کی قیمت ۹۸۱ ہے۔ دریافت کرو کہ ۱۴۱۰۵۳ سنیٹی میٹر طول کا رقاص ۲۴۲ ثانیہ میں کتنی

دفعہ جھولیگا؟

(۶) ثابت کرو کہ ایک رقاص جس کا طول ایک میل ہے ۴۰ ثانیہ میں جھولیگا۔

(۷) ایک رقاص جس کا طول ۱۸ء ۳۷ انچ ہے ایک مقام پر تین دقیقہ میں ۱۸۳ دفعہ جھولتا ہے۔ اسراع بجاذبہ ارض معلوم کرو۔

(۸) دریافت کرو کہ ایک دن میں ۴ فٹ طول کا ایک رقاص کتنے اہتزاز کرے گا؟

(۹) ۴۵۰ فٹ لمبا رقاص پیرس کے ایفل برج میں لٹکتا ہے۔ ثابت کرو کہ اس کا پورا اہتزاز ۲۳ ثانیہ میں ہوتا ہے

۱۶۲۔ دفعہ ۱۵۹ کا نتیجہ اگرچہ نظراً صحیح نہیں ہے لیکن تقریباً صحیح ضرور ہے۔ اگر رقاص اپنے اہتزاز سے سمت شاقولی کے دونو طرف پانچ پانچ درجے کا زاویہ بنائے تو نتیجہ کا فرق صحیح نتیجے کے دو ہزارویں حصے کے اندرہی ہوگا۔ یعنی جو رقاص ایک ثانیہ میں جھولتا ہے اگراسکا پینگ بہت چھوٹا ہو اور دونو جانب پانچ درجے ہو تو ایک دن میں وہ تقریباً ۴۰ ثانیہ پیچھے رہ جائے گا۔

۱۶۳۔ بسیط رقاص جس کا بیان اوپر ہوا ایک خیالی چیز ہے۔ عملاً رقاص میں ایک رسی سے ایک گولا بندھا ہوتا ہے۔ رسی کی کمیت اگرچہ کم ہوتی ہے لیکن صفر

نہیں ہوتی اور گولے کو ہم ذرہ نہیں کہ سکتے۔

ہمارا کوئی رقاص خواہ کسی شکل کا ہو اس کا **بسیط مساوی رقاص** وہ رقاص ہے جس کی مدت اہتزاز ہمارے رقاص کے مساوی ہو۔ کسی استوار جسم اور اس کے بسیط مساوی رقاص کے باہمی تعلق پر ہم اس کتاب کی حدود کے اندر بحث نہیں کر سکتے تاہم یہ بات قابل ذکر ہے کہ اگر ایک پتلی یکساں سلاخ کا ایک سرا ثابت ہو اور وہ رقاص کی طرح جھولے تو اس کی مدت اہتزاز اس بسیط رقاص کی مدت کے مساوی ہوگی جس کا طول سلاخ کے طول کا دو ثلث ہو۔

۱۶۴۔ اسراع بجاذبۂ ارض۔ نیوٹن نے قدرت کا یہہ بنیادی قانون دریافت کیا کہ ہر ایک ذرہ ہر ایک دوسرے ذرے کو ایک ایسی قوت سے کھینچتا ہے جو اسی طرح بدلتی ہے جس طرح ذروں کی کمیتوں کا حاصل ضرب اور ان کے درمیانی فاصلے کے مربع کا عکس۔

جذبی قوتوں کی کسی کتاب کے دیکھنے سے ظاہر ہوگا کہ بذریعہ قانون مذکورہ بالا ثابت ہو سکتا ہے کہ اگر ایک ذرہ ایک کرے کے باہر ہو تو کرے کی جذبی قوت ذرے پر اس طرح عمل کرتی ہے گویا کرے کی کل کمیت اس کے مرکز پر جمع ہے۔ اس لئے وہ اسراع جو اس قوت کے

اثر سے پیدا ہوا اس طرح بدلتا ہے جس طرح مرکز اور ذرے کے درمیانی فاصلے کے مربعے کا عکس۔

یہہ بھی ثابت ہوسکتا ہے کہ اگر ذرہ کرے کے اندر واقع ہو تو اس پر کرے کی جذبی قوت اس طرح بدلتی ہے جس طرح مرکز سے ذرہ کا فاصلہ بدلتا ہے۔

پس اگر بلندی ی پر جاذبہ ارض کی قیمت $ج_۱$ ہو اور سطح زمین پر ج ہو اور زمین کا قطر ن ہو تو

$$ج_۱ : ج :: \frac{۱}{(ن + ی)^۲} : \frac{۱}{ن^۲}$$

اس لئے

$$ج_۱ = ج \left(\frac{ن}{ن + ی}\right)^۲$$

اگر ایک کان کے اندر جس کی گہرائی گ ہے جاذبہ ارض کی قیمت $ج_۱$ ہو تو $ج_۱ = ج \frac{ن - گ}{ن}$

اس سے ظاہر ہے کہ ج کی قیمت سطح زمین پر اندرون زمین اور بیرون زمین سے زیادہ ہے۔

۱۶۵ - اب ہم اس مسئلہ پر غور کرینگے کہ اگر بسیط رقاص کے طول میں تھوڑی سی تبدیلی واقع ہو یا ج کی قیمت میں تھوڑی تبدیلی ہو تو رقاص کی مدت اہتزاز پر کیا اثر ہوگا۔

اگر ایک رقاص کا طول ط ہو اور وہ ایک وقت مفروض میں ن پورے اہتزاز کرے تو ثابت کرو کہ

(۱) اگر ج بدل کر ج + جَ ہو جائے تو تعداد اہتزازات

میں $\frac{ن}{۲} \times \frac{جَ}{ج}$ کا اضافہ ہو گا

(۲) اگر رقاص کو سطح زمین سے بلندی ی پر لے جائیں تو تعداد اہتزازات میں ن × $\frac{ی}{ر}$ کی کمی ہو گی جہاں ر زمین کا نصف قطر ہے۔

(۳) اگر اسے ایک کان کے اندر لے جائیں جس کی گہرائی گ ہے تو تعداد میں $\frac{ن}{۲} \times \frac{گ}{ر}$ کی کمی ہو گی۔

(۴) اگر اس کا طول بدل کر ط + طَ ہو جائے تو تعداد میں کمی $\frac{ن}{۲} \times \frac{طَ}{ط}$ ہو گی۔

فرض کرو کہ پہلے مدت اہتزاز ت تھی اور تبدیلی کے بعد تَ ہو گئی۔ اور فرض کرو کہ وقت مفروض میں اہتزاز کی نئی تعداد نَ ہے تو

$$ن\ ت = نَ\ تَ$$

(۱) اس صورت میں $ت = ۲\pi \sqrt{\frac{ط}{ج}}$

اور $تَ = ۲\pi \sqrt{\frac{ط}{ج+جَ}}$

$$\therefore \frac{نَ}{ن} = \frac{ت}{تَ} = \sqrt{۱ + \frac{جَ}{ج}} = ۱ + \frac{۱}{۲}\frac{جَ}{ج} \text{ تقریباً}$$

[بذریعہ مسئلہ ثنائی ، $\frac{\text{جَ}}{\text{ج}}$ کا مربع اور باقی رقمیں نظرانداز کی گئی ہیں]

اس لئے تعداد اہتزازات میں اضافہ $= \text{نَ} - \text{ن} = \frac{\text{ن}}{\text{۲}} \times \frac{\text{جَ}}{\text{ج}}$

اگر ج بدل کر ج - جَ ہو جائے تو اسی طرح تعداد

اہتزازات میں کمی $= \frac{\text{ن}}{\text{۲}} \times \frac{\text{جَ}}{\text{ج}}$ ۔

(۲) اگر بلندی ی پر ج کی قیمت ج - جَ ہو تو

$$\frac{\text{ج} - \text{جَ}}{\text{ج}} = \frac{\text{ر}^{\text{۲}}}{(\text{ر} + \text{ی})^{\text{۲}}} = \left(\text{۱} + \frac{\text{ی}}{\text{ر}}\right)^{-\text{۲}}$$

$$= \text{۱} - \frac{\text{۲ی}}{\text{ر}} \quad \text{تقریباً}$$

$$\therefore \text{جَ} = \text{ج} \, \frac{\text{۲ی}}{\text{ر}}$$

اس لئے جیسا کہ صورت (۱) میں معلوم ہوا تعداد اہتزازات میں کمی $\frac{\text{ن ی}}{\text{ر}}$ ہوگی۔

(۳) اگر گہرائی پر ج کی قیمت ج - جَ ہو تو

$$\text{ج} - \text{جَ} : \text{ج} :: \text{ر} - \text{گ} : \text{ر}$$

$\therefore$ تعداد اہتزازات میں کمی $= \frac{\text{ن}}{\text{۲}} \times \frac{\text{جَ}}{\text{ج}} = \frac{\text{ن}}{\text{۲}} \times \frac{\text{گ}}{\text{ر}}$

(۴) اگر طول ط بدل کر ط + طَ ہو جائے تو

$$\text{ت} = \text{۲}\pi \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ج}}}$$

اور $\text{ت}' = 2\pi\sqrt{\frac{\text{ط} + \text{ط}'}{\text{ج}}}$

$\therefore \frac{\text{ن}'}{\text{ن}} = \frac{\text{ت}}{\text{ت}'} = \left(1 + \frac{\text{ط}'}{\text{ط}}\right)^{-\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\frac{\text{ط}'}{\text{ط}}$ تقریباً

اس لئے تعداد اہتزازات میں کمی $= \text{ن} - \text{ن}' = \frac{\text{ن}}{2} \times \frac{\text{ط}'}{\text{ط}}$

اس مسئلہ سے ظاہر ہے کہ اگر ثانیہ کے ایک رقاص کو سطح زمین سے کسی پہاڑ پر یا کان کے اندر لے جائیں تو پہاڑ کی بلندی یا کان کی گہرائی تعداد اہتزازات کی کمی سے معلوم ہو سکتی ہے۔

۱۶۶۔ **مثال** (۱) سطح زمین پر ایک رقاص کی مدت اہتزاز ایک ثانیہ ہے۔ اگر اسے پانچ میل بلند پہاڑ کی چوٹی پر لیجائیں تو دریافت کرو کہ ایک دن میں کتنے ثانیوں کی کمی ہو گی؟

یہ تسلیم کرلیا جائے کہ زمین کا نصف قطر ۴۰۰۰ میل ہے۔
فرض کرو کہ سطح سمندر پر اور پہاڑ کی چوٹی پر اسراع بجاذبہ ارض بالترتیب ج اور ج_1 ہے تو

$$\text{ج} : \text{ج}_1 :: \frac{1}{(4000)^2} : \frac{1}{(4005)^2}$$

$$\therefore \frac{\text{ج}}{\text{ج}_1} = \left(\frac{4005}{4000}\right)^2 = \left(\frac{801}{800}\right)^2$$

چونکہ سطح زمین پر مدت اہتزاز ایک ثانیہ ہے اس لئے

$$ا = \pi \sqrt{\frac{ط}{ج}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۱)$$

اگر پہاڑ کی چوٹی پر مدت ت ہو تو

$$ت = \pi \sqrt{\frac{ط}{ج'}} \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (۲)$$

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$ت = \sqrt{\frac{ج}{ج'}} = \frac{۸۰۱}{۸۰۰}$$

اس لئے پہاڑ کی چوٹی پر ایک دن میں تعداد اہتزازات

$$= \frac{۸۶۴۰۰}{ت} = ۸۶۴۰۰ \times \frac{۸۰۰}{۸۰۱}$$

$$= ۸۶۴۰۰ \times \frac{1}{1 + \frac{1}{۸۰۰}} = ۸۶۴۰۰ \left(1 + \frac{1}{۸۰۰}\right)^{-1}$$

$$= ۸۶۴۰۰ \left(1 - \frac{1}{۸۰۰}\right) \text{تقریباً}$$

$$= ۸۶۴۰۰ - ۱۰۸$$

اس لئے تعداد اہتزازات میں ۱۰۸ کی کمی ہوگی

مثال (۲) ثانیہ کا ایک ناقص رقاص ایک دن میں ۲۰ ثانیہ سست ہو جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ اس کو درست کرنے کے لئے اس کے طول میں کیا تبدیلی کی جائے؟

یہہ رقاص ۸۶۴۰۰ ثانیوں میں ۸۶۳۸۰ دفعہ جھولتا ہے

یعنی اس کی مدت اہتزاز = $\frac{۸۶۴۰}{۸۶۳۸}$ ثانیہ

اس لئے اگر اس کا طول ط ہو تو

$$\frac{۸۶۴۰}{۸۶۳۸} = \pi \sqrt{\frac{\text{ط}}{\text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots\ldots (۱)$$

اگر اس مقام پر ثانیہ کے رقاص کا صحیح طول ط + ل ہو تو

$$۱ = \pi \sqrt{\frac{\text{ط} + \text{ل}}{\text{ج}}} \quad \ldots\ldots\ldots (۲)$$

(۱) کے مربعے کو (۲) کے مربعے میں سے تفریق کرنے سے

$$۱ - \left(\frac{۸۶۴۰}{۸۶۳۸}\right)^{۲} = \pi^{۲} \times \frac{\text{ل}}{\text{ج}}$$

$$\therefore \text{ل} = -\frac{\text{ج}}{\pi^{۲}} \left[\left(\frac{۸۶۴۰}{۸۶۳۸}\right)^{۲} - ۱\right]$$

$$= -\frac{\text{ج}}{\pi^{۲}} \left[\left(۱ - \frac{۲}{۸۶۴۰}\right)^{-۲} - ۱\right]$$

$$= -\frac{۷^{۲} \times ۳۲}{۲۲^{۲}} \left[۱ + \frac{۴}{۸۶۴۰} - ۱\right] \text{ تقریباً}$$

$$= -\frac{۴۹ \times ۳۲}{۴۸۴} \times \frac{۴}{۸۶۴۰} = -\frac{۴۹}{۲۷۰ \times ۱۲۱} \text{ فٹ}$$

= ۔ ۰۱۸ء انچ

اس لئے رقاص کے طول میں بقدر ۰۱۸ء انچ کمی کرنی چاہئے

۱۶۷ - چاند کی حرکت کے ذریعہ قانون جاذبۂ ارض کی تصدیق -

یہہ تسلیم کر کے کہ چاند کی گردش زمین کے گرد جاذبۂ ارضی کی وجہ سے ہے ہم چاند کی پوری گردش کی مدت معلوم کر سکتے ہیں اور اس کے ذریعہ سے ہم قوت جاذبۂ ارض کی تصدیق کر سکتے ہیں -

فرض کرو کہ زمین کی قوت جاذبہ کی وجہ سے چاند کا اسراع ع ہے تو چونکہ دونوں جسموں کے مرکزوں کا درمیانی فاصلہ زمین کے نصف قطر کا ۶۰ گنا ہے اس لئے

$$ع : ج :: \frac{1}{(۶۰\ ن)^2} : \frac{1}{ن^2}$$

جہاں ن زمین کا نصف قطر ہے -

$$\text{یعنی}\quad ع = \frac{ج}{۳۶۰۰}$$

فرض کرو کہ چاند کی رفتار زمین کے گرد ر ہے تو بموجب دفعہ ۱۳۵

$$\frac{ج}{۳۶۰۰} = ع = \frac{ر^2}{۶۰\ ن}$$

∴ ر۲ = ج ن / ۶۰

اس لئے چاند کی گردش کی مدت

= ۲ π × ۶۰ ن ÷ ر

= ۲ π × ۶۰ × √(۶۰ن / ج) ثانیہ

زمین کے نصف قطر کو ۴۰۰۰ میل تسلیم کرکے اور ج کو ۳۲٫۲ مان کر یہہ مدت ۲۷٫۴ دن ہوتی ہے۔ اور چاند کی گردش کی مدت جو نظر آتی ہے وہ بھی تقریباً یہی ہے۔

امثلہ نمبری (۲۸)

(۱) ایک رقاص کی مدت اہتزاز گرینچ میں ایک ثانیہ ہے اور وہاں ج کی قیمت ۳۲٫۲ ہے۔ اب اس رقاص کو کسی دوسرے مقام پر لیجاتے ہیں جہاں یہہ ۲۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جاتا ہے۔ دوسرے مقام پر ج کی کیا قیمت ہو گی؟

(۲) ایک رقاص ایک مقام پر ۱۰ ثانیہ فی یوم تیز ہو جاتا ہے۔ دونوں مقاموں پر اسراع بجاذبہ ارض معلوم کرو۔

(۳) اگر یہ تسلیم کرلیا جائے کہ فٹ ثانیہ اکائیوں میں ج کی قیمت خط استوا اور قطب شمالی پر بالترتیب ۳۲٫۰۹ اور ۳۲٫۲۵ ہے تو دریافت کروکہ جو رقاص خط استوا پر

ایک ثانیہ میں جھولتا ہے وہ قطب شمالی پر کتنے ثانیہ فی یوم تیز ہو گا؟

(۴) ایک کلاک جس میں ثانیہ کا رقاص لگا ہے ایک دن میں ۹ ثانیہ سست ہو جاتا ہے۔ دریافت کرو کہ رقاص کے طول میں کیا تبدیلی کی جائے؟

(۵) ایک کلاک ۵ ثانیہ فی یوم تیز ہو جاتا ہے۔ بتلاؤ کہ اس کو کس طرح درست کیا جاے؟

(۶) اگر ثانیہ کے ایک رقاص کا طول بقدر $\frac{۱}{۱۰۰}$ زیادہ کردیا جائے تو دریافت کرو کہ ایک دن میں تعداد اہتزازات میں کس قدر کمی ہو گی؟

(۷) ایک بسیط رقاص کی مدت اہتزاز ایک ثانیہ ہے۔ اس کا طول بقدر $\frac{۱}{۲۰}$ انچ زیادہ کردیا گیا ہے۔ دریافت کرو کہ ۲۴ گھنٹوں میں کتنے ثانیوں کی کمی ہو گی؟

(۸) ایک بسیط رقاص ۴۴ ثانیوں میں پورے ۲۱ پینگ لیتا ہے۔ جب اس کے طول کو بقدر ۴۷،۶۸۷۵ سنٹی میٹر کم کردیا جائے تو وہ ۳۳ ثانیوں میں ۲۱ کامل اہتزاز کرتا ہے۔ ج کی قیمت دریافت کرو۔

(۹) لوہے کے ایک باریک تار سے ایک وزنی گولہ لٹکا کر ثانیہ کا ایک بسیط رقاص بنایا گیا ہے۔ اگر رقاص حرارت کے صفر درجہ سنٹی گریڈ پر صحیح ہو تو دریافت کرو کہ ۲۴ گھنٹوں میں ۲۰ درجہ سنٹی گریڈ پر کتنے ثانیونکی

کمی یا زیادتی ہو گی - یہہ معلوم ہے کہ حرارت کی اسقدر زیادتی سے لوہے کا طول بقدر ۰۰۰۲۴۳ر فی اکائی بڑھ جاتا ہے -

(۱۰) اگر ثانیہ کا ایک رقاص ایک کان کی تہ پر ۱۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جائے تو کان کی گہرائی معلوم کرو اور یہہ بھی دریافت کرو کہ کان کی گہرائی کے نصف پر رقاص کس قدر سست ہو گا ؟

(۱۱) ایک کلاک سطح زمین پر ۱۰ ثانیہ فی یوم تیز ہو جاتا ہے اور ایک کان کی تہ پر ۱۰ ثانیہ فی یوم سست ہو جاتا ہے - کان کا عمق دریافت کرو اور سطح زمین پر اور کان کی تہ پر جو اسراع بجاذبۂ ارض ہیں ان کا مقابلہ کرو -

(۱۲) اگر ثانیہ کے ایک رقاص کو نصف میل بلند پہاڑ کی چوٹی پر لیجائیں تو ایک دن میں کتنے سیکنڈ سست ہو جائے گا ؟

یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ پائے کوہ سے زمین کے مرکز کا فاصلہ ۴۰۰۰ میل ہے -

یہہ بھی دریافت کرو کہ رقاص کا طول کس قدر کم کیا جائے کہ پہاڑ کی چوٹی پر بھی مدت اہتزاز ایک ثانیہ رہے -

(۱۳) اگر ایک پہاڑی کی چوٹی پر ۲۴ گھنٹے میں ثانیہ کے رقاص کی تعداد اہتزازات میں ن کی کمی ہو تو ثابت کرو کہ پہاڑی کی بلندی ۲۴۵ × ن فٹ ہو گی -

(۱۴) ایک غبارہ یکساں اسراع سے اوپر چڑھتا ہے اور

ایک منٹ میں ۹۰۰ فٹ کی بلندی تک پہنچ جاتا ہے۔ غبارے میں ایک کلاک ہے جس میں ثانیہ کا رقاص لگا ہے۔
ثابت کرو کہ کلاک ۲۸ ثانیہ فی ساعت کے حساب سے تیز ہوتا جائے گا۔
(۱۵) پنجرے کی شکل کا ایک لفٹ اکائی اسراع سے نیچے اتر رہا ہے۔ اس میں ایک کلاک ہے جس کا رقاص ثانیہ کا وقت دیتا ہے۔ ثابت کرو کہ کلاک بشرح ۵۶ ثانیہ فی ساعت سست ہو جائیگا۔
(۱۶) اگر ثانیہ کا ایک رقاص زمین سے اٹھاکر چاند پر لیجائیں تو ثابت کرو کہ وہاں اس کی مدت اہتزاز $\frac{1}{4}$ ۲ ثانیہ ہوگی۔ یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ زمین کی کمیت چاند کی کمیت سے ۸۱ گنا ہے اور زمین کا نصف قطر چاند کے نصف قطر سے چار گنا ہے۔
(۱۷) ایک ریل گاڑی ایک مدور منحنی پر ۶۰ میل فی گھنٹہ کے حساب سے یکساں چل رہی ہے۔ گاڑی میں ثانیہ کا ایک رقاص ہے جو اب ۲ منٹ میں ۱۲۱ دفعہ جھولتا ہے۔ ثابت کرو کہ منحنی کا نصف قطر ۱۳۱۷ فٹ ہے۔
(۱۸) اگر زمین یکذات کرہ ہو اور سطح زمین سے مرکز تک ایک نلی لگی ہو تو اس نلی میں سطح سے مرکز تک

ایک ذرہ وقت ت میں جاتا ہے۔ اگر سطح مرکز تک قوت جاذبہ ارض یکساں رہے تو ذرہ وقت تَ میں مرکز تک پہنچتا ہے۔ ثابت کرو کہ

$$ت : \bar{ت} :: \pi : ۲\sqrt{۲}$$

(۱۹) ایک بسیط رقاص قوت جاذبہ ارض کے زیر عمل اس طرح جھولتا ہے کہ جب رسی عمودی ہوتی ہے اس وقت اس کا تناؤ رقاص کے گولے کے وزن سے دو چند ہوتا ہے۔ ثابت کرو کہ سمت عمودی سے رسی کا بڑے سے بڑا میلان $\frac{\pi}{۳}$ ہے۔

(۲۰) ۸ فٹ لمبی رسی سے ایک جسم لٹک رہا ہے اور ۳ انچ کے فاصلے تک جھولتا ہے۔ مدت اہتزاز دریافت کرو اور یہ بھی معلوم کرو کہ پینگ کے دونوں سروں پر اسراع کیا ہونگے اور وسط میں رفتار کیا ہوگی؟

باب دوازدہم

اکائیاں اور ابعاد

۱۶۸ - جب ہم کسی خاص شئے کی مقدار کا اندازہ لگانا چاہتے ہیں تو ہم اُسے اسی قسم کی کسی اکائی کی رقموں میں بیان کرتے ہیں۔ یعنی اس میں دو باتوں کا بیان ضروری ہے۔ **اول** ہماری اکائی **دوم** یہہ کہ اس خاص مقدار میں ایسی کتنی اکائیاں ہیں یعنی اس مقدار کی اکائی سے کیا نسبت ہے۔

یہہ نسبت، اکائی کی رقموں میں اس مقدار کی ناپ کہلاتی ہے۔

مثلاً اگر ہم کسی آدمی کے قد کو بیان کرنا چاہیں تو ہم کہہ سکتے ہیں کہ یہہ چھ فٹ ہے۔ یہاں فٹ ہماری اکائی ہے اور چھ، ناپ ہے۔ ہم یہہ بھی کہہ سکتے ہیں کہ اس آدمی کا قد ۲ گز یا ۷۲ انچ ہے۔

مختلف اکائیوں کے استعمال کرنے سے ناپ مختلف ہوگی۔ لیکن اگر ہم کسی چیز کی ناپ کو اکائی سے ضرب دیں تو

حاصل ضرب تمام صورتوں میں مساوی ہونگے (مثلاً ۲ گز = ۶ فٹ = ۷۲ انچ)

پس اگر کسی طبیعی مقدار کے اندازے کے لئے اکائیاں [ک] اور [کَ] استعمال کی جائیں اور ان دونو صورتوں میں ناپ بالترتیب ن اور نَ ہوں تو

ن [ک] = نَ [کَ]

اس لئے [ک] : [کَ] :: $\frac{1}{ن}$: $\frac{1}{نَ}$

لہذا بموجب تعریف تبدل

[ک] $\propto$ $\frac{1}{ن}$

یعنی وہ اکائی جس کی رقموں میں کسی مقدار کا اندازہ لگایا جائے اس طرح بدلتی ہے جس طرح ناپ کا عکس۔ اور ناپ اس طرح بدلتی ہے جس طرح اکائی کا عکس۔

۱۶۹۔ ایک خط مستقیم کا صرف طول ہوتا ہے اس کی چوڑائی اور موٹائی نہیں ہوتی۔ اس لئے یوں کہا جاتا ہے کہ خط مستقیم کا ایک بُعد طول میں ہے۔

اگر ہم کوئی رقبہ لیں تو اس کی لمبائی بھی ہوگی اور چوڑائی بھی۔ لیکن موٹائی نہیں ہوگی۔ اس لئے یوں کہا جاتا ہے کہ رقبے کے دو بُعد طول میں ہیں۔ رقبے کی اکائی عموماً وہ ہوتی ہے جس کی لمبائی اور چوڑائی طول کی اکائی کے

مساوی ہو۔ پس اگر ہم طول کی دو مختلف اکائیاں لیں جن کی نسبت ل : ۱ ہو تو ان کے مطابق رقبے کی اکائیاں ل^2 : ۱ کی نسبت میں ہوں گی۔ یعنی اگر رقبے کی اکائی کو [ر] سے اور طول کی اکائی کو [ط] سے تعبیر کریں تو

$$[\text{ر}] \propto [\text{ط}]^2$$

مثلاً ایک فٹ میں ۱۲ انچ ہوتے ہیں لیکن ایک مربع فٹ میں ۱۴۴ مربع انچ ہوتے ہیں۔

اگر ہم حجم کو لیں تو اس میں لمبائی چوڑائی موٹائی تینوں ہوتی ہیں۔ اس کو یوں کہا جاتا ہے کہ حجم کے تین بُعد طول میں ہیں۔ حجم کی اکائی وہ ہے جس کی لمبائی چوڑائی موٹائی طول کی اکائی کے مساوی ہو۔ رقبے کی صورت کی طرح اگر [ح] حجم کی اکائی کو تعبیر کرے تو

$$[\text{ح}] \propto [\text{ط}]^3$$

چونکہ رقبے اور حجم کی اکائیاں طول کی اکائی پر منحصر ہیں اس لئے ان کو ماخوذ اکائیاں کہتے ہیں اور طول کی اکائی اساسی اکائی کہلاتی ہے۔

ایک اور اساسی اکائی وقت کی اکائی ہے۔ اس کو عام طور پر [و] سے تعبیر کرتے ہیں۔ وقت کی کسی مدت کا بُعد وقت کے لحاظ سے ایک ہے۔

تیسری اساسی یا مطلق اکائی کمیت مادہ کی اکائی ہے۔ اسکو [ک] سے تعبیر کرتے ہیں۔ مادے کی کسی مقدار کا بُعد بلحاظ کمیت مادہ کے ایک ہے۔

یہہ تینوں بنیادی اکائیاں ہیں۔ باقی تمام اکائیاں چونکہ اِن تینوں پر منحصر ہیں اس لئے ماخوذ اکائیاں کہلاتی ہیں۔

(۱۷۰) دفعہ (۹) میں رفتار کی اکائی کی تعریف یوں کی گئی ہے :-

اگر ایک نقطہ وقت کی اکائی میں طول کی اکائی طے کرے تو اس نقطے کی رفتار کو رفتار کی اکائی کہتے ہیں۔

پس اگر وقت کی اکائی یا طول کی اکائی یا دونو میں تبدیلی واقع ہو تو رفتار کی اکائی بھی بالعموم بدل جائے گی۔

مثلاً فرض کرو کہ طول کی اکائی ایک فٹ سے بدل کر ۲ فٹ ہو جاتی ہے اور وقت کی اکائی ایک ثانیہ سے ۳ ثانیہ ہو جاتی ہے۔ تو رفتار کی نئی اکائی ایک ایسے نقطے کی رفتار ہوگی جو ۳ ثانیہ میں ۲ فٹ طے کرتا ہے۔ یعنی جو ایک ثانیہ میں $\frac{۲}{۳}$ فٹ طے کرتا ہے۔ پس رفتار کی یہہ اکائی پہلی اکائی کا دو ثلث ہے۔

اسی طرح اگر ایک متحرک جسم کی رفتار کی تبدیلی وقت کی ایک اکائی میں رفتار کی اکائی کے مساوی ہو تو یہہ کہا جاتا ہے کہ اس جسم کی حرکت میں اسراع کی ایک اکائی ہے۔ اس لئے اسراع کی اکائی کا انحصار رفتار اور وقت کی اکائیوں

پر ہے - یعنی بالآخر طول اور وقت کی اکائیوں پر ہے -
بموجب دفعہ (۶۱) قوت کی اکائی وہ قوت ہے جو کمیت مادہ کی اکائی میں اسراع کی اکائی پیدا کرے - اسلئے کمیت مادہ کی اکائی یا اسراع کی اکائی بدلنے سے قوت کی اکائی بدل جائے گی - پس قوت کی اکائی بالآخر طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیوں پر منحصر ہے

۱۷۱ - **مسئلہ** - ثابت کرو کہ رفتار کی اکائی ایسا بدلتی ہے جیسا طول کی اکائی اور وقت کی اکائی کا عکس -
فرض کرو کہ ایک نظام میں طول، وقت اور رفتار کی اکائیاں

[ط] ، [و] اور [ل] ہیں اور دوسرے نظام میں [طَ] ، [وَ] اور [لَ] ہیں - اور فرض کرو کہ

[طَ] = م [ط] اور [وَ] = ن [و]

تب ایک جسم رفتار کی پہلی اکائی سے اس وقت حرکت کرتا ہے جبکہ وہ

وقت [و] میں طول [ط] طے کرے -

اس لئے رفتار م [ل] سے اسی وقت حرکت کریگا جبکہ وہ

وقت [و] میں طول م [ط] طے کرے -

لہذا رفتار $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ [ر] سے اس وقت حرکت کریگا جبکہ وہ
وقت ن [و] میں طول م [ط] طے کرے
یعنی رفتار $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ [ر] سے اس وقت حرکت کریگا جبکہ وہ
وقت [وَ] میں طول [طَ] طے کرے۔
لیکن جب وہ وقت [وَ] میں طول [طَ] طے کرتا ہے
اس وقت اس کی رفتار [رَ] ہوتی ہے۔

$$\therefore \; [\text{رَ}] = \frac{\text{م}}{\text{ن}} [\text{ر}]$$

$$\therefore \; [\text{رَ}] : [\text{ر}] :: \text{م} : \text{ن}$$

$$:: \frac{[\text{طَ}]}{[\text{ط}]} : \frac{[\text{وَ}]}{[\text{و}]}$$

$$:: \frac{[\text{طَ}]}{[\text{وَ}]} : \frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]}$$

پس تبدل کی تعریف کے بموجب

$$[\text{ر}] \propto \frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]} \text{ یعنی } \propto [\text{ط}][\text{و}]^{-1}$$

۱۷۲۔ **مسئلہ**۔ ثابت کرو کہ اسراع کی اکائی اس طرح بدلتی ہے جس طرح طول کی اکائی اور وقت کی اکائی کے مربعے کا عکس۔

طول اور وقت کی اکائیاں حسب دفعہ ۱۷۱ لو اور

فرض کرو کہ [ع] اور [عَ] ان کے مطابق اسراع کی اکائیاں ہیں۔

تب ایک جسم کی حرکت میں اسراع کی پہلی اکائی [ع] اس وقت ہوتی ہے

جبکہ وقت [و] میں رفتار [ط] فی [و] کا اضافہ ہوتا ہے

لہذا اسراع م [ع] اس وقت ہوگا

جبکہ وقت [و] میں رفتار م [ط] فی [و] کا اضافہ ہو

اس لئے اسراع $\frac{\text{م}}{\text{ن}}$ [ع] اس وقت ہوگا

جبکہ وقت [و] میں رفتار م [ط] فی ن [و] کا اضافہ ہو

اس لئے اسراع $\frac{\text{م}}{\text{ن}^2}$ [ع] اس وقت ہوگا
جبکہ وقت ن [و] میں رفتار م [ط] فی ن [و] کا اضافہ ہو
یعنی اسراع $\frac{\text{م}}{\text{ن}^2}$ [ع] اس وقت ہوگا

جبکہ وقت [وَ] میں رفتار [طَ] فی [وَ] کا اضافہ ہو
لیکن یہہ اسراع کی نئی اکائی [عَ] ہے

$$\therefore [\text{عَ}] = \frac{\text{م}}{\text{ن}^2} [\text{ع}]$$

$$\therefore [\text{عَ}] : [\text{ع}] :: \text{م} : \text{ن}^2$$

$$:: \frac{[\text{طَ}]}{[\text{ط}]} : \frac{[\text{وَ}]^2}{[\text{و}]^2}$$

$$:: \frac{[\text{طَ}]}{[\text{وَ}]^2} : \frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^2}$$

اس لئے بموجب تعریف تبدل

$$[\text{ع}] \propto \frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^2} \quad \text{یعنی} \quad \propto [\text{ط}]\,[\text{و}]^{-2}$$

۱۷۳- مثال (۱) اگر طول اور وقت کی اکائیاں فٹ اور ثانیہ سے بدل کر بالترتیب ۱۰۰ فٹ اور ۵۰ ثانیہ ہو جائیں تو دریافت کرو کہ رفتار اور اسراع کی اکائیاں کس نسبت میں بدلیں گی؟

۱۰۰ فٹ فی ۵۰ ثانیہ کی رفتار، رفتار کی نئی اکائی ہو گی۔
اور یہہ ۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار ہے۔ اس لئے رفتار کی نئی اکائی رفتار کی پہلی اکائی سے دوگنی ہے۔
ایک جسم کی حرکت میں اسراع کی نئی اکائی اس وقت ہوگی جبکہ ۵۰ ثانیہ میں ۱۰۰ فٹ فی ۵۰ ثانیہ کی رفتار کا اضافہ ہو۔
یعنی جبکہ ۵۰ ثانیہ میں ۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار کا اضافہ ہو۔
یعنی جبکہ ایک ثانیہ میں $\frac{1}{25}$ فٹ فی ثانیہ کی رفتار کا اضافہ ہو۔
پس اسراع کی نئی اکائی اسراع کی پہلی اکائی کا $\frac{1}{25}$ ہے۔
یا بطرز دیگر۔ دفعات (۱۷۱) و (۱۷۲) کا طریق کتابت لو۔ تب

$$[\text{ط}'] = 100\,[\text{ط}] \quad \text{اور} \quad [\text{و}'] = 50\,[\text{و}]$$

$$\therefore \frac{[\text{ر}']}{[\text{ر}]} = \frac{[\text{ط}'][\text{و}']^{-1}}{[\text{ط}][\text{و}]^{-1}} = 100 \times [50]^{-1} = 2$$

$$\text{اور} \quad \frac{[\text{ع}']}{[\text{ع}]} = \frac{[\text{ط}'][\text{و}']^{-2}}{[\text{ط}][\text{و}]^{-2}} = 100 \times [50]^{-2} = \frac{100}{2500} = \frac{1}{25}$$

یعنی رفتار اور اسراع کی نئی اکائیاں۔ پہلی اکائیوں سے بالترتیب دوگنی اور $\frac{\text{۱}}{\text{۲۵}}$ ہیں۔

مثال (۲)۔ اگر اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت فٹ ثانیہ کے نظام میں ۳۲٫۲ ہو تو اس کی قیمت گز دقیقہ کے نظام میں دریافت کرو۔

ایک گرتے ہوئے جسم کی رفتار میں ایک ثانیہ میں ۳۲٫۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار کا اضافہ ہوتا ہے۔

تو ایک دقیقہ میں $\text{۶۰} \times \text{۳۲٫۲}$ فٹ فی ثانیہ کی رفتار کا اضافہ ہوگا۔

یعنی ایک دقیقہ میں $\text{۶۰}^{\text{۲}} \times \text{۳۲٫۲}$ فٹ فی دقیقہ کی رفتار کا اضافہ ہوگا۔

اس لئے ایک دقیقہ میں $\frac{\text{۶۰}^{\text{۲}}}{\text{۳}} \times \text{۳۲٫۲}$ گز فی دقیقہ کی رفتار کا اضافہ ہوگا۔

$$\therefore \text{قیمت مطلوبہ} = \frac{\text{۳۲٫۲} \times \text{۶۰}^{\text{۲}}}{\text{۳}} = \text{۳۸۶۴۰}$$

اس سوال کا مختصر حل یہ ہے۔

فرض کرو کہ قیمت مطلوبہ لا ہے۔

$$\text{تو} \quad \text{لا} \times [\text{عَ}] = \text{۳۲٫۲} \, [\text{ع}]$$

$$\therefore \text{لا} = \text{۳۲٫۲} \times \frac{[\text{ع}]}{[\text{عَ}]} = \text{۳۲٫۲} \times \frac{[\text{ط}]\,[\text{و}]^{-\text{۲}}}{[\text{طَ}]\,[\text{وَ}]^{-\text{۲}}}$$

$$= ۳۲٫۲ \times \frac{۱}{۳ \times (۶۰)^{-۲}} = ۳۲٫۲ \times \frac{۶۰^{۲}}{۳}$$

$$= ۳۸۶۴۰$$

مثال (۳)۔ اگر ایک گرتے ہوئے جسم کا اسراع بطور اسراع کی اکائی کے لیا جائے اور جو رفتار کہ گرتا ہوا جسم ایک منٹ میں حاصل کرے وہ رفتار کی اکائی ہو تو طول اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو۔

دفعات (۱۷۱) و (۱۷۲) کا طریق کتابت استعمال کرو۔

تب $۱ \times [عَ] = ۳۲ \times [ع]$

$\therefore [طَ][وَ]^{-۲} = ۳۲ \times [ط][و]^{-۲} \quad ......(۱)$

فٹ ثانیہ اکائیوں میں جو رفتار ایک منٹ میں حاصل ہو

وہ $= ۳۲ \times ۶۰$

اس لئے $۱ \times [رَ] = ۳۲ \times ۶۰ \times [ر]$

یعنی $۱ \times [طَ][وَ]^{-۱} = ۳۲ \times ۶۰ \times [ط][و]^{-۱} \quad ......(۲)$

مساوات (۲) کے مربعے کو (۱) پر تقسیم کرنے سے

$$[طَ] = \frac{۳۲^{۲} \times ۶۰^{۲}}{۳۲}[ط] = ۳۲ \times ۶۰^{۲} \text{ فٹ}$$

پس بذریعہ (۲) $\frac{[وَ]}{[و]} = \frac{۱}{۳۲ \times ۶۰} \frac{[طَ]}{[ط]} = ۳۲ \times ۶۰^{۲} \times \frac{۱}{۳۲ \times ۶۰}$

∴ [و] = ۶۰ [و] = ۶۰ ثانیہ = ایک دقیقہ

امثلہ نمبری (۲۹)

(۱) اگر طول کی اکائی ایک میل ہو اور وقت کی اکائی ایک دقیقہ ہو تو رفتار اور اسراع کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۲) اگر طول کی اکائی ایک میل ہو اور وقت کی اکائی ۴ ثانیہ ہو تو رفتار اور اسراع کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۳) اگر رفتار کی اکائی ۳۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار ہو اور وقت کی اکائی ایک منٹ ہو تو طول اور اسراع کی اکائیاں معلوم کرو۔

(۴) اگر ایک بلا تکلف گرنے والے جسم کا اسراع بطور اسراع کی اکائی کے استعمال کیا جائے اور وقت کی اکائی ۵ ثانیہ ہو تو ثابت کرو کہ رفتار کی اکائی ۱۶۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار ہے۔

(۵) اگر اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت ۱۴ رکھی جائے اور وقت کی اکائی ۵ ثانیہ ہو تو طول کی اکائی کیا ہوگی؟

(۶) اگر رفتار کی اکائی ۳ میل فی گھنٹہ کی رفتار ہو اور وقت کی اکائی ایک منٹ ہو تو طول کی اکائی دریافت کرو۔

(۷) اگر ایک گرتے ہوئے جسم کا اسراع بطور اسراع کی اکائی کے لیا جائے اور جو رفتار یہ جسم ۵ ثانیہ میں حاصل کرے وہ رفتار کی اکائی ہو تو ثابت کرو کہ طول اور وقت کی

اکائیاں بالترتیب ۸۰۰ فٹ اور ۵ ثانیہ ہونگی۔

(۸) اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت دریافت کرو:۔

(۱) جب طول اور وقت کی اکائیاں ایک فٹ اور نصف ثانیہ ہوں۔

(۲) جب یہہ اکائیاں ایک میل اور ۱۱ ثانیہ ہوں۔

(۳) جب یہہ اکائیاں ۱۰ گز اور ۱۰ منٹ ہوں۔

(۹) اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت دریافت کرو جب طول اور وقت کی اکائیاں سینٹی میٹر اور منٹ ہوں۔یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ ایک میٹر ۳۹،۳۷ انچ کے مساوی ہے۔

(۱۰) اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت فٹ ثانیہ اکائیوں میں ۳۲ ہے۔اگر وقت اور طول کی اکائیاں گھنٹہ کا $\frac{1}{10000}$ اور سینٹی میٹر ہوں تو اس اسراع کی قیمت دریافت کرو۔ یہہ معلوم ہے کہ ایک سینٹی میٹر = ۰،۰۳۲۸ فٹ

(۱۱) اگر ۱۰ ایکڑ کے کھیت کا رقبہ ۱۰۰ ہو اور ایک گرتے ہوئے جسم کا اسراع $58\frac{2}{3}$ ہو تو وقت کی اکائی دریافت کرو۔

۱۷۴۔ **ابعاد ۔ تعریف**۔ جب ہم یہہ کہتے ہیں کہ ایک طبیعی مقدار کے ابعاد طول، وقت اور کمیت مادہ میں عہ، بہ اور جہ ہیں تو اس سے ہمارا یہہ مطلب ہوتا ہے کہ اس مقدار کے ناپنے کی اکائی اس طرح بدلتی ہے جس طرح

[ط]^عہ [و]^بہ [ک]^جہ

مثلاً دفعات (۱۷۱) و (۱۷۲) کے نتائج اس طرح بیان ہوتے ہیں کہ رفتار کے ابعاد طول میں ۱ اور وقت میں -۱ ہیں اور اسراع کے ابعاد طول میں ۱ اور وقت میں -۲ ہیں۔ دفعات (۱۷۱) و (۱۷۲) میں صراحت کے ساتھ بیان ہوا ہے لیکن یہ نتائج زیادہ آسانی اور اختصار کے ساتھ بھی حاصل ہو سکتے ہیں جیسا کہ دفعہ آئندہ سے ظاہر ہو گا۔

۱۷۵- (۱) **رفتار**۔ فرض کرو کہ ایک نقطے کی رفتار کی عددی قیمت ژ ہے اور وہ ایسے وقت میں جس کی عددی قیمت ز ہے ایک ایسا فاصلہ طے کرتا ہے جسکی عددی قیمت ف ہے تو

$$ف = ز ژ$$

اگر طول، وقت اور رفتار کی اکائیاں [ط]، [و] اور [ر] ہوں تو حسب طریق دفعہ (۱۶۸)

$$ف \propto \frac{1}{[ط]}\text{، } ز \propto \frac{1}{[و]} \text{ اور } ژ \propto \frac{1}{[ر]}$$

$$\therefore \frac{1}{[ط]} \propto \frac{1}{[و]}\,\frac{1}{[ر]}$$

$$\text{پس } [ر] \propto [ط]\,[و]^{-1}$$

(۲) **اسراع**۔ فرض کرو کہ ایک ذرہ اسراع س سے

حرکت کرتا ہے اور وقت ز میں رفتار ژ حاصل کرتا ہے تو

$$\text{ژ} = \text{س}\ \text{ز}$$

اگر [ع] اسراع کی اکائی کو تعبیر کرے تو

$$\text{س} \propto \frac{1}{[\text{ع}]}$$

$$\therefore \frac{1}{[\text{ر}]} \propto \frac{1}{[\text{ع}]} \frac{1}{[\text{و}]}$$

$$\text{پس}\quad [\text{ع}] \propto [\text{ر}][\text{و}]^{-1} \propto [\text{ط}][\text{و}]^{-2}$$

(۳) **کثافت**۔ فرض کرو کہ ایک جسم کی کثافت ڈ ہے اور اس کی کمیت مادہ گ ہے اور حجم خ ہے تو

$$\text{گ} = \text{خ}\ \text{ڈ}$$

اگر [ث] اور [ح] کثافت اور حجم کی اکائیاں ہوں تو

$$\text{ڈ} \propto \frac{1}{[\text{ث}]} \quad \text{اور} \quad \text{خ} \propto \frac{1}{[\text{ح}]}$$

$$\therefore \frac{1}{[\text{ک}]} \propto \frac{1}{[\text{ث}]} \frac{1}{[\text{ح}]}$$

$$\therefore [\text{ث}] \propto [\text{ک}][\text{ح}]^{-1} \propto [\text{ک}][\text{ط}]^{-3}$$

اگر جسم بہت پتلا ہو ایسا کہ اسے محض سطح سمجھ سکیں تو

حسب طریق بالا سطحی کثافت کی اکائی ∝ [ک] [ط]⁻²

اسی طرح اگر جسم ایسا ہو کہ اس کی چوڑائی اور موٹائی نظرانداز ہو سکے یعنی جسم ایک مادی خط ہو تو

خطی کثافت کی اکائی ∝ [ک] [ط]⁻¹

(۴) **قوت**۔ اگر ظ ایسی قوت ہو جو کمیت مادہ گ میں اسراع س پیدا کرے تو ظ = گ س

پس اگر [ق] قوت کی اکائی کو تعبیر کرے تو

[ق] ∝ [ک] [ع] ∝ [ک] [ط] [و]⁻²

(۵) **معیارِ حرکت**۔ اگر کمیت مادہ گ کا ایک جسم رفتار ژ سے حرکت کر رہا ہو اور اس کا معیار حرکت مح ہو تو

مح = گ ژ

پس اگر [م] معیار حرکت کی اکائی ہو

تو [م] ∝ [ک] [ر] ∝ [ک] [ط] [و]⁻¹

(۶) **صدمہ**۔ اگر ایک قوت ظ کا صدمہ وقت زمیں

صم ہو تو

صم = ز ظ

پس اگر [ص] صدمہ کی اکائی ہو تو

[ص] ∝ [ق] [و] ∝ [ک] [ط] [و]$^{-1}$

اس سے ظاہر ہے کہ صدمہ اور معیار حرکت کے ابعاد ایک ہی ہیں۔

(۷) **توانائی بالفعل**۔ اگر گ کمیت کا ایک جسم رفتار ژ سے حرکت کر رہا ہو اور اس کی توانائی بالفعل ٹ ہو تو

ٹ = $\frac{1}{2}$ گ ژ^{2}

پس اگر [ت] توانائی بالفعل کی اکائی ہو تو

[ت] ∝ [ک] [ل]^{2} ∝ [ک] [ط]^{2} [و]$^{-2}$

(۸) **کام**۔ اگر ایک قوت ظ کا نقطۂ عمل فاصلہ ف طے کرے اور اگر اس قوت کے کئے ہوئے کام کو ی سے تعبیر کریں تو

ی = ظ ف

پس اگر کام کی اکائی ل ہو تو

$$[\text{ل}] \propto [\text{ط}][\text{ق}] \propto [\text{ک}][\text{ط}]^{۲}[\text{و}]^{-۲}$$

لہذا کام اور توانائی بالفعل کے ابعاد ایک ہی ہیں

(۹) **طاقت** یعنی کام کرنے کی شرح ۔ اگر طق وہ طاقت ہو جس سے کام ی وقت ز میں ہوتا ہے تو

$$\text{طق} = \frac{\text{ی}}{\text{ز}} = \text{ی ز}^{-۱}$$

پس اگر [سط] طاقت کی اکائی ہو تو

$$[\text{سط}] \propto [\text{ل}][\text{و}]^{-۱} \propto [\text{ک}][\text{ط}]^{۲}[\text{و}]^{-۳}$$

(۱۰) **زاویئی رفتار** ۔ اگر ھا ایک ایسے نقطے کی زاویئی رفتار ہو جو رفتار ژ سے ن نصف قطر والے دائرے میں حرکت کرتا ہے تو

$$\text{ھا} = \frac{\text{ژ}}{\text{ن}} = \text{ژ ن}^{-۱} \qquad [\text{دفعہ ۲۶}]$$

پس اگر زاویئی رفتار کی اکائی [ھ] سے تعبیر ہو تو

$$[\text{ھ}] = [\text{ر}][\text{ط}]^{-۱} = [\text{و}]^{-۱}$$

۱۷۶ - **مثال** (۱) اگر کمیت مادہ کی اکائی ۱۱۲ پونڈ ہو

اور طول کی اکائی ایک میل ہو اور وقت کی اکائی ایک منٹ ہو تو قوت کی اکائی دریافت کرو۔

بموجب دفعہ (۶۱) قوت کی اکائی وہ قوت ہے جو کمیت مادہ کی اکائی میں اسراع کی اکائی پیدا کرتی ہے۔

یعنی جو ۱۱۲ پونڈ میں ایک میل فی منٹ فی منٹ کا اسراع پیدا کرتی ہے۔

یعنی ۱۱۲ پونڈ میں $\frac{۱}{۶۰}$ میل فی ثانیہ فی منٹ کا اسراع پیدا کرتی ہے

یعنی ۱۱۲ پونڈ میں $\frac{۱}{۳۶۰۰}$ میل فی ثانیہ فی ثانیہ " " "

یعنی ۱۱۲ پونڈ میں $\frac{۳ \times ۱۷۶۰}{۶۰ \times ۶۰}$ فٹ فی ثانیہ فی ثانیہ " " "

یعنی ۱ پونڈ میں $\frac{۱۱۲ \times ۳ \times ۱۷۶۰}{۶۰ \times ۶۰}$ فی ثانیہ فی ثانیہ " " "

پس قوت کی نئی اکائی = $\frac{۱۱۲ \times ۳ \times ۱۷۶۰}{۶۰ \times ۶۰}$ پونڈل

= $۱۶۴ \frac{۴}{۱۵}$ پونڈل = $۵ \frac{۲}{۱۵}$ پونڈ وزن تقریباً

یا بطرز دیگر۔ بموجب دفعہ ۱۷۵ (۴)

$$\frac{[\bar{ق}]}{[ق]} = \frac{[\bar{ک}][\bar{ط}][\bar{و}]^{-۲}}{[ک][ط][و]^{-۲}} = ۱۱۲ \times ۱۷۶۰ \times ۳ \times (۶۰)^{-۲}$$

$$= \frac{۱۱۲ \times ۱۷۶۰ \times ۳}{۶۰ \times ۶۰} = ۱۶۴ \frac{۴}{۱۵}$$

حسب سابق

مثال (۲) ایک جسم کی توانائی بالفعل فٹ پونڈ ثانیہ نظام میں ۱۰۰۰ ہے - اس کی قیمت میٹر گرام منٹ نظام میں دریافت کرو - یہہ معلوم ہے کہ ایک منٹ = ۳۰،۵ سینٹی میٹر اور ایک پاونڈ = ۴۵۰ گرام تقریباً -
فرض کرو کہ قیمت مطلوبہ لا ہے تو

لا [تَ] = ۱۰۰۰ [ت]

لا [کَ] [طَ]^{۲} [وَ]$^{-۲}$ = ۱۰۰۰ [ک] [ط]^{۲} [و]$^{-۲}$

لیکن [ک] = ۴۵۰ [کَ] اور ط = ۳۰،۵ [طَ] اور [و] = $\frac{۱}{۶۰}$ [وَ]

∴ لا = ۱۰۰۰ × ۴۵۰ × [۳۰،۵]^{۲} × ۶۰^{۲}

= ۱۵۰۷۰۰،۵۰۰

مثال (۳) اگر رفتار کی اکائی ۱۲ فٹ فی ثانیہ کی رفتار ہو اور اسراع کی اکائی ۲۴ فٹ ثانیہ اکائیاں ہوں اور قوت کی اکائی ۲۰ پونڈل ہو تو کمیت مادہ اور طول اور وقت کی اکائیاں دریافت کرو - ساتھ ہی کام کی اکائی بھی معلوم کرو -

رفتار کی اکائی [رَ] = ۱۲ [ر]

یعنی [طَ] [وَ]$^{-۱}$ = ۱۲ [ط] [و]$^{-۱}$ ......(۱)

اسراع کی اکائی [عَ] = ۲۴ [ع]

یعنی [طَ] [وَ]$^{-۲}$ = ۲۴ [ط] [و]$^{-۲}$ ....(۲)

قوت کی اکائی [قَ] = ۲۰ [ق]

یعنی [کَ] [طَ] [وَ]$^{-۲}$ = ۲۰ [ک] [ط] [و]$^{-۲}$ ....(۳)

(۲) کو (۱) پر تقسیم کرنے سے

[وَ]$^{-۱}$ = ۲ [و]$^{-۱}$

∴ [وَ] = $\frac{۱}{۲}$ [و] = ۵ء ثانیہ

(۱) کے مربعے کو (۲) پر تقسیم کرنے سے

[طَ] = $\frac{۱۲^{۲}}{۲۴}$ [ط] = ۶ [ط] = ۶ فٹ

(۳) کو (۲) پر تقسیم کرنے سے

[کَ] = $\frac{۲۰}{۲۴}$ [ک] = $\frac{۵}{۶}$ پونڈ

پس کمیت مادہ اور طول اور وقت کی اکائیاں

$\frac{۵}{۶}$ پونڈ، ۶ فٹ، $\frac{۱}{۲}$ ثانیہ ہونگی۔

بموجب دفعہ ۱۰۵ (۸)

$$\frac{[\text{ل}']}{[\text{ل}]} = \frac{[\text{ک}']}{[\text{ک}]}\left[\frac{\text{ط}'}{\text{ط}}\right]^{2}\left[\frac{\text{و}'}{\text{و}}\right]^{-2} = \frac{5}{6}\times(6)^{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{-2}$$

$$\therefore [\text{ل}'] = \frac{5\times 6^{2}\times 2^{2}}{6}[\text{ل}] = 120 \text{ فٹ پونڈل}$$

امثلہ نمبری (۳۰)

(۱) اگر طول کی اکائی ۳۹ انچ ہو اور وقت کی اکائی ۳ ثانیے اور کمیت مادہ کی اکائی ۳ ہنڈرڈ ویٹ ہو تو قوت کی اکائی دریافت کرو

(۲) اگر کمیت مادہ، طول اور وقت کی اکائیاں بالترتیب ۱۰ پونڈ، ۱۰ فٹ اور ۱۰ ثانیہ ہوں تو قوت اور کام کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۳) اگر طول کی اکائی ۲ فٹ ہو اور کمیت مادہ کی اکائی ایک پونڈ ہو تو وقت کی اکائی کیا ہونی چاہیئے کہ قوت کی اکائی ایک پونڈ وزن ہو۔

(۴) اگر کمیت مادہ کی اکائی ایک ہنڈرڈ ویٹ ہو اور قوت کی اکائی ایک ٹن وزن ہو اور طول کی اکائی ایک میل ہو تو ثابت کرو کہ وقت کی اکائی $\frac{1}{2}\sqrt{33}$ ثانیہ ہے۔

(۵) اگر رفتار کی اکائی ایک میل فی منٹ کی رفتار ہو۔ اور اسراع کی اکائی وہ اسراع ہو جس سے یہہ رفتار ۵ منٹ

میں حاصل ہو اور قوت کی اکائی نصف ٹن وزن کے مساوی ہو۔ تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۶) اگر کمیت مادہ کی اکائی ایک ہنڈرڈ ویٹ ہو اور وقت کی اکائی ایک منٹ ہو اور قوت کی اکائی ایک پونڈ وزن ہو تو طول کی اکائی دریافت کرو۔

(۷) اگر قوت کی اکائی ۵ اونس وزن کے مساوی ہو اور وقت کی اکائی ایک منٹ ہو اور ۶۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار ۹ سے تعبیر ہو تو طول اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۸) اگر $\frac{۱}{۲}$۵ گز طول کی اکائی ہو اور رفتار کی اکائی ایک گز فی ثانیہ کی رفتار ہو اور قوت کی اکائی ۶ پونڈل ہو تو کمیت مادہ کی اکائی دریافت کرو۔

(۹) یہہ تسلیم کرکے کہ ایک فٹ = ۳۰٫۵ سنٹی میٹر، ایک پونڈ = ۴۵۳ گرام اور ایک گرتے ہوے جسم کا اسراع = ۳۲ فٹ ثانیہ اکائیاں،
ثابت کرو کہ

(۱) ایک پونڈل = ۱۳۸۱۶ ڈائین
(۲) ایک فٹ پونڈل = ۴۲۱۴۰۳ ارگ
(۳) ایک ارگ = $۱۰^{-۸} \times ۷٫۴۱۶$ فٹ پونڈ
(۴) ایک اسپی طاقت = $۱۰^{۹} \times ۷٫۴۱۶$ ارگ فی ثانیہ

(۱۰) اکائیوں کے دو مختلف نظاموں میں ایک اسراع کی قیمت ایک ہی عدد سے تعبیر ہوتی ہے اور ایک رفتار

دو مختلف عددوں سے تعبیر ہوتی ہے جن کی نسبت ۱:۳
ہے۔ طول اور وقت کی اکائیوں کا مقابلہ کرو۔

اگر ایک جسم کا معیار حرکت ایسے عددوں سے تعبیر ہو جس کی نسبت ۵:۲ ہے تو کمیت مادہ کی اکائیوں کا مقابلہ کرو۔

(۱۱) اگر طول، رفتار اور قوت کی اکائیوں میں سے ہر ایک دوچند ہو جائے تو ثابت کرو کہ وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں نہیں بدلیں گی اور توانائی بالفعل کی اکائی ۱:۴ کی نسبت میں بڑھ جائے گی۔

(۱۲) اگر وقت کی اکائی ایک گھنٹہ ہو اور کمیت مادہ کی ایک ہنڈرڈ ویٹ ہو اور قوت کی اکائی ایک پونڈ وزن ہو تو مطلق اکائیوں میں کام اور معیارِ حرکت کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۳) اکائیوں کا ایک ایسا نظام دریافت کرو جس میں قوت کی اکائی ایک پونڈ وزن ہو اور اگر ۴ پونڈ کمیت کا ایک جسم ۵ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہو تو اسکے معیار حرکت اور توانائی بالفعل میں سے ہر ایک کی عددی قیمت ایک ہو۔

(۱۴) اگر ایک گرتے ہوئے جسم کا اسراع بطور اسراع کی اکائی کے لیا جائے اور ۵ ثانیہ میں اس کی رفتار محصلہ بطور رفتار کی اکائی کے استعمال کی جائے اور ۱۰ ثانیہ گرنے کے بعد ایک پونڈ کے جسم کا معیارِ حرکت بطور معیار حرکت کی

اکائی کے لیا جائے تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۵) جو کام ایک ہنڈرڈ ویٹ کو تین گز اوپر وار اٹھانے میں کیا جائے اگر وہ کام کی اکائی ہو۔ اور معیار حرکت کی اکائی ایک ایسے جسم کا معیار حرکت ہو جس کی کمیت مادہ ایک پونڈ ہو اور جبکہ وہ بجاذبۂ ارض سمت شاقولی میں ۴ فٹ گرے اور اسراع کی اکائی اس اسراع کا تین گنا ہو جو جاذبۂ ارض سے ظہور میں آتا ہے تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۶) اگر اسراع کی اکائی وہ اسراع ہو جو ۱۶ گرام کمیت کے جسم میں ایک گرام وزن کی قوت کے عمل سے پیدا ہو اور جو کام پہلے چار ثانیہ میں ہو وہ کام کی اکائی ہو اور جب جسم ۹۰ سنٹی میٹر فی ثانیہ کی رفتار سے چل رہا ہو اسوقت کام کی شرح کی اکائی سے کام ہو رہا ہو تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۷) ایک ریل گاڑی ۶۰ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ اگر اس رفتار کو ۸ سے تعبیر کیا جائے۔ اور ریل کی حرکت کے مقابل جو مزاحمت ہے وہ ۱۶۰۰ پونڈ وزن کے مساوی ہے۔ اگر اس مزاحمت کو ۱۰ سے تعبیر کریں۔ اور ایک میل چلنے میں انجن جتنی کام کی اکائیاں کرتا ہے ان کو ۱۰ سے تعبیر کیا جائے تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۸) اکائیوں کے ایک نظام میں اسراع بجاذبۂ ارض ۳ سے

تعبیر ہوتا ہے۔ اور ۶۰۰ پونڈ کمیت کا ایک گولہ جو ۱۶۰۰ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کر رہا ہے اس کی توانائی بالفعل ۱۰۰ سے تعبیر ہوتی ہے اور اس کا معیار حرکت ۱۰ سے تعبیر ہوتا ہے۔ طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو۔

(۱۹) ایک ریل گاڑی کی کمیت ۱۰۰ ٹن ہے اور وہ ۴۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہی ہے۔ اگر اس کی توانائی بالفعل کو ۱۱ سے تعبیر کیا جائے۔ اور اس قوت کے صدمے کو جو اس کو ساکن کر سکے ۵ سے تعبیر کریں اور ۴۰ اسپی طاقت کو ۱۵ سے تعبیر کریں تو طول، وقت اور کمیت مادہ کی اکائیاں دریافت کرو اور ثابت کرو کہ اسراع بجاذبۂ ارض ۲۰۱۶ سے تعبیر ہوگا۔ یہہ تسلیم کر لیا جائے کہ فٹ ثانیہ اکائیوں میں اسراع بجاذبۂ ارض کی قیمت ۳۲ ہے۔

(۲۰) اگر قوت کی اکائی ایک پونڈ وزن ہو تو دریافت کرو کہ کمیت مادہ کی اکائی کیا ہونی چاہیئے کہ مساوات (قوت = کمیت مادہ × اسراع) ان اکائیوں کے لئے بھی صحیح رہے۔

شمارِ ابعاد سے ضابطوں کی تصدیق

۱۷۷۔ بہت سے ضابطوں اور نتیجوں کی جانچ مقادیر مشمولہ کے ابعاد شمار کرنے سے ہو سکتی ہے۔ فرض کرو کہ ایک ایسی مساوات ہے جس میں چند مقادیر طبیعی شامل ہیں

تو اسی مساوات کی ایک جانب کی ہر ایک رقم کے ابعاد کا مجموعہ طول، وقت اور کمیت مادہ میں لیا جائے اور مساوات کی دوسری جانب کی رقموں کے ابعاد کو بھی جمع کریں تو مطابق کی رقموں کے ابعاد کے مجموعے مساوی ہوں گے۔ کیونکہ فرض کرو کہ مساوات کی ایک جانب کے ابعاد طول میں دوسری جانب کے ابعاد سے مختلف ہیں تو طول کی اکائی بدلنے سے مساوات کی دونو جانبیں مختلف نسبتوں میں بدلیں گی اور مساوی نہیں رہیں گی۔ یہہ صریحاً باطل ہے کیونکہ دو مساوی مقادیر کی ناپیں ہمیشہ مساوی ہونی چاہئیں خواہ ان کے لئے کوئی سی اکائی استعمال کی جائے۔ مثلاً اگر نقدی کی دو رقمیں برابر ہیں تو ان کی ناپیں برابر ہونگی خواہ رقموں کو روپوں میں بیان کیا جائے یا آنوں میں یا پائیوں میں۔

اب ایک اور مثال لو۔ فرض کرو کہ ایک مساوات سے ہم اس نتیجہ پر پہنچتے ہیں کہ ۳ فٹ = ۱۰ ثانیہ۔ ظاہر ہے کہ یہہ نتیجہ صحیح نہیں ہو سکتا۔

اب یہہ مساوات لو

$$ ۳\ ژ^{۲} = ۵\ ک\ ب^{۲} + ۲\ ع\ ف $$

جہاں ک ایک جسم کی کمیت مادہ ہے اور ب اسکی ابتدائی رفتار ہے اور حرکت شروع ہونے کے بعد کسی آن میں اس کی رفتار ژ ہے اور ع اس کا اسراع ہے اور

ف وہ فاصلہ ہے جو اس نے اس آن تک طے کیا۔
یہہ مساوات ہرگز صحیح ہنیں ہو سکتی کیونکہ دو رقمیں ایسی ہیں کہ کمیت مادہ میں ان کا بعُد صفر ہے اور تیسری رقم یعنی ۵ ک ب^{۲} کا بعُد کمیت مادہ میں ایک ہے -یہی رقم غالباً غلط ہو گی -

اب مساوات ذیل کی صحت کے امکان پر غور کرو۔

ظ ز ف^{۲} + ۸ ک ع^{۲} ف - ۱۰ ث^{۳} ع = ۰

جہاں طریق کتابت حسب باب ہذا ہے -
اگر صرف ابعاد کو لیا جائے تو تینوں رقموں کے ابعاد یہہ ہیں -

$$[\text{ک}]\,\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^{2}}\times\frac{\text{ط}}{[\text{و}]}\times[\text{ط}]^{2} \quad ، \quad [\text{ک}]\left\{\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^{2}}\right\}^{2}[\text{ط}] \quad ، \quad \left\{\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]}\right\}^{3}\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^{2}}$$

$$\text{یعنی}\ [\text{ک}]\,\frac{[\text{ط}]^{4}}{[\text{و}]^{3}} \quad ، \quad [\text{ک}]\,\frac{[\text{ط}]^{3}}{[\text{و}]^{4}} \quad ، \quad \frac{[\text{ط}]^{4}}{[\text{و}]^{5}}$$

اس سے ظاہر ہے کہ مساوات بالکل غلط ہے کیونکہ رقمونکے ابعاد نہ تو کمیت مادہ میں مساوی ہیں اور نہ طول اور وقت میں۔
اب فرض کرو کہ ایک سوال میں کام کی مقدار مطلوب ہے

اور سوال حل کرنے سے ہمیں یہہ جواب حاصل ہوتا ہے -

$$\text{کام} = \text{ک ظ ژ} + ۳\ \text{ک ژ ع}$$

جہاں طریق کتابت حسب باب ہذا ہے -

یہہ مساوات صحیح نہیں ہو سکتی کیونکہ بموجب دفعہ ۱۷۵ کام کے ابعاد یہہ ہیں

$$[\text{ک}]\frac{[\text{ط}]^2}{[\text{و}]^2}$$

اور ک ظ ژ کے ابعاد یہہ ہیں $[\text{ک}]\frac{[\text{ک}][\text{ط}]}{[\text{و}]^2}\times\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]}$

یعنی $$[\text{ک}]^2\frac{[\text{ط}]^2}{[\text{و}]^3}$$

یہہ ابعاد طول اور کمیت مادہ کے لحاظ سے غلط ہیں -

۳ ک ژ ع کے ابعاد یہہ ہیں $[\text{ک}]\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]}\,\frac{\text{ط}}{[\text{و}]^2}$

یعنی $$\frac{[\text{ک}]\,[\text{ط}]^2}{[\text{و}]^3}$$

یہہ ابعاد وقت کے لحاظ سے غلط ہیں -

۱۷۸ - اکثر اوقات مقادیر کے ابعاد پر غور کرنے سے بہت سے نتائج حاصل ہو سکتے ہیں۔ مثلاً یہہ آسانی سے ثابت ہو سکتا ہے کہ ایک بسیط رقاص کی مدت اہتزاز اس طرح بدلتی ہے جس طرح $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ ، جہاں ل اس ہلکی رسی کا طول ہے جس کے ذریعہ سے کمیت م کی ایک گولی ایک ثابت نقطے سے بندھی ہے۔

اگر یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ مدت اہتزاز کا انحصار قوس اہتزاز پر نہیں ہے تو ہمارے سوال کے جواب میں صرف تین مقداریں شامل ہو سکتی ہیں یعنی م ، ل اور ج ۔ فرض کرو کہ مدت اہتزاز اس طرح بدلتی ہے جس طرح $\text{م}^{\text{عہ}}\ \text{ل}^{\text{بہ}}\ \text{ج}^{\text{گہ}}$۔ اس مقدار کے ابعاد یہہ ہیں

$$[\text{ک}]^{\text{عہ}}\ [\text{ط}]^{\text{بہ}} \left\{\frac{[\text{ط}]}{[\text{و}]^{2}}\right\}^{\text{گہ}}$$

یعنی $[\text{ک}]^{\text{عہ}}\ [\text{ط}]^{\text{بہ}+\text{گہ}}\ [\text{و}]^{-2\,\text{گہ}}$

یہہ ظاہر ہے کہ جواب کا صرف ایک بُعد وقت میں ہے اور کمیت مادہ اور طول میں کوئی بُعد نہیں ہے۔

اسی لئے

$$\text{عہ} = 0 \ \text{،}\ \text{بہ} + \text{گہ} = 0 \ \text{اور}\ -2\,\text{گہ} = 1$$

$$\therefore \text{گہ} = -\frac{۱}{۲} \quad \text{اور} \quad \text{بہ} = \frac{۱}{۲}$$

پس مدت اہتزاز اس طرح بدلتی ہے جس طرح $\sqrt{\frac{\text{ل}}{\text{ج}}}$ [دفعہ ۱۵۹]

بنیادی مقادیر کے ابعاد اور قیمتوں کی جدول

مقادیر طبیعی	ابعاد بلحاظ		
	کمیت مادہ	طول	وقت
حجمی کثافت	۱	-۳	
سطحی کثافت	۱	-۲	
خطی کثافت	۱	-۱	
رفتار		۱	-۱
اسراع		۱	-۲
قوت	۱	۱	-۲
معیار حرکت	۱	۱	-۱
صدمہ	۱	۱	-۱
توانائی بالفعل	۱	۲	-۲
طاقت یا کام کی شرح	۱	۲	-۳
زاویئی رفتار			-۱

"ج" کی قیمتیں

مقام	فٹ ثانیہ اکائیاں	سینٹی میٹر ثانیہ اکائیاں
خط استوا	۳۲٫۰۹۱	۹۷۸٫۱۰
عرض بلد ۴۵°	۳۲٫۱۷	۹۸۰٫۶۱
پیرس	۳۲٫۱۸۳	۹۸۰٫۹۴
لندن	۳۲٫۱۹۱	۹۸۱٫۱۷
قطب شمالی	۳۲٫۲۵۲	۹۸۳٫۱۱

ثانیہ کے رقاص کا طول لندن میں

= ۳۹٫۱۳۹ انچ = ۹۹٫۴۱۳ سینٹی میٹر

۱ سینٹی میٹر = ۰٫۳۹۳۷۰ انچ = ۰٫۰۳۲۸۰۹ فٹ

۱ فٹ = ۳۰٫۴۷۹۷ سینٹی میٹر

۱ گرام = ۱۵٫۴۳۲ گرین = ۰٫۰۰۲۲۰۴۶ پونڈ

۱ پونڈ = ۴۵۳٫۵۹ گرام

۱ ڈائین = $\frac{1}{981}$ گرام کا وزن تقریباً

۱ پونڈل = ۱۳۸۲۵ ڈائین

۱ فٹ پونڈل = ۴۲۱۳۹۰ ارگ

متفرق سوالات

(۱) ایک ذرہ بغیر کسی روک کے ایک برج کی چوٹی پر سے گرتا ہے اور اپنی حرکت کے آخری ثانیہ میں کل بلندی کا $\frac{۵}{۹}$ حصہ طے کرتا ہے۔ برج کی بلندی دریافت کرو۔

(۲) ایک شخص ایفل برج پر چڑھتا ہے اور ایک خاص بلندی سے ایک پتھر نیچے چھوڑتا ہے۔ پھر ۱۰۰ فٹ اور زیادہ چڑھکر ایک اور پتھر گراتا ہے۔ زمین تک پہنچنے میں دوسرے پتھر کو پہلے پتھر سے نصف ثانیہ زیادہ لگتا ہے۔ ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرکے دریافت کرو کہ پہلا پتھر کس بلندی سے چھوڑا گیا اور اسے زمین تک پہنچنے میں کس قدر وقت صرف ہوا؟

(۳) ایک گولی ۱۲۰۰ فٹ فی سیکنڈ کی رفتار سے حرکت کرتی ہوئی ایک لکڑی میں گھس جاتی ہے اور ایک انچ گھسنے سے اس کی رفتار نصف رہ جاتی ہے۔ یہ تسلیم کرکے کہ مزاحمت یکساں ہے دریافت کرو کہ گولی کتنی دور گھس کر ساکن ہوگی؟

(۴) ترازو کے دو پلڑے جن میں سے ہر ایک کی کمیت ۷ اونس ہے ایک رسی کے دونوں سروں میں باندھکر ایک چکنی چرخی پر چڑھادئے گئے ہیں۔ اگر ایک پلڑے میں ۵ اونس کمیت کا جسم رکھا جائے اور دوسرے پلڑے میں

۸ اونس کمیت کا۔ تو دونو پلڑوں پر جسموں کا دباؤ دریافت کرو۔

(۵) دو مساوی جسم ایک رسی کے دونوں سروں میں باندھکر ایک ہلکی چرخی پر چڑھا دئے گئے ہیں اور توازن میں لٹکتے ہیں۔ ثابت کرو کہ اگر ایک جسم میں بقدر اس کے $\frac{۱}{ن}$ کے اضافہ کردیا جائے اور دوسرے میں سے اس کا $\frac{۱}{ن+۲}$ نکال دیا جائے تو رسی کے تناؤ میں کوئی فرق نہیں آئے گا۔

(۶) ایک بے وزن رسی کا طول ط ہے۔ اس کے سروں سے دو جسم جن کی کمیت م اور ۳ م ہے بندھے ہوئے ہیں۔ رسی کو میز پر اس طرح رکھ دیا گیا ہے کہ رسی کا طول میز کے کنارے سے زاویہ قائمہ بناتا ہے اور م کنارے پر سے نیچے لٹکتا ہے۔ اگر میز کی بلندی بھی ط ہو تو ثابت کرو کہ ۳ م فرش پر م سے فاصلہ ط پر گریگا۔ واضح رہے کہ فرش بے لچک ہے۔

(۷) ایک ذرہ جو بجاذبۂ ارض گرتا ہے ایک خاص ثانیہ میں ۱۰۰ فٹ طے کرتا ہے ہوا کی مزاحمت کو نظر انداز کرکے دریافت کرو کہ اس کے بعد کے ۱۰۰ فٹ وہ کتنے وقت میں طے کرے گا؟

اگر بوجہ مزاحمت ذرے کو ۹ء ثانیہ وقت لگے تو مزاحمت کو یکساں فرض کرکے مزاحمت کی نسبت ذرے کے وزن سے معلوم کرو۔

(۸) ایک بسیط رقاص کے گولے کو اٹھا کر ایسی وضع میں

لایا جاتا ہے کہ رسی کس کر افقی ہو جاتی ہے۔ اب یہاں سے گولے کو چھوڑ دیا جاتا ہے۔
ثابت کرو کہ جو حرکت ہو گی اس میں رسی کا تناؤ گولے کے طے کردہ عمودی فاصلے کے متناسب ہو گا۔
(۹) ایک ذرہ ایک رسی کے ذریعہ سے سمت شاقولی میں لٹک رہا ہے۔ رسی کا طول ل ہے اور دوسری طرف رسی ایک ثابت نقطے سے بندھی ہے۔ اب ذرے کو رفتار $\sqrt{\text{۶ ج ل}}$ سے سمت افقی میں حرکت دیجاتی ہے۔
جب رسی افقی وضع میں ہوتی ہے اور اس کے بعد جب ذرہ بلند ترین مقام پر پہنچتا ہے ان دونوں وضعوں میں ثابت کرو کہ رسی کے تناؤں کی نسبت ۴ : ۱ ہے۔
(۱۰) ایک انجن م پونڈ کمیت کے ایک بوجھ کو ایک سطح مائل پر کھینچ کرلے جاتا ہے۔ سطح کا میلان افق سے عہ ہے اور قدر فرک ق ہے۔
اگر حرکت کی ابتدا حالت سکون سے ہو اور اسراع ایکساں ہو اور و ثانیہ میں رفتار ل حاصل ہو جائے تو ثابت کرو کہ انجن کی اوسط اسپی طاقت $\frac{\text{م ل}}{\text{۱۱۰۰}}\left[\frac{\text{ل}}{\text{ج و}}+\text{ق جم عہ}+\text{جب عہ}\right]$

ہے۔

(۱۱) ایک جسم ایک لفٹ میں اوپر وار پھینکا جاتا ہے۔ رفتار رمی بلحاظ لفٹ کے ر ہے اور جسم کی مدت پرواز

و ہے ثابت کرو کہ لفٹ اوپر کی طرف اسراع $\frac{۲ر - وج}{و}$ سے جارہا ہے۔

(۱۲) ایک جہاز شمال کی طرف جارہا ہے اور اس کا دھواں مشرق جنوب مشرق کی طرف جارہا ہے۔ ایک اور جہاز جنوب کی طرف جارہا ہے اور اس کا دھواں شمال شمال مشرق کی طرف جارہا ہے۔ دونو جہازوں کی رفتاریں مساوی ہیں۔ ثابت کرو کہ ہوا شمال مشرق کی جانب چل رہی ہے اور اس کی رفتار جہازوں کی رفتار کے مساوی ہے۔

(۱۳) ایک گھوڑا ایک دائرے میں ۱۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چل رہا ہے۔ دائرے کا نصف قطر ۶۰ فٹ ہے۔ ثابت کرو کہ زمین اور گھوڑے کے سموں کے درمیان قدر فرک کی اقل قیمت $\frac{۱}{۱۴}$ ہے۔

(۱۴) ایک ریل گاڑی چل رہی ہے اور دوران حرکت میں ایک ڈبہ علیحدہ ہو جاتا ہے اور ن منٹ میں فاصلہ ف طے کرکے ساکن ہو جاتا ہے۔ یہہ تسلیم کرکے کہ ابطاء یکساں ہے ریل گاڑی کی رفتار اس وقت کی معلوم کرو جس وقت ڈبہ علیحدہ ہوا۔

سے

(۱۵) ایک جہاز جنوب مشرق کی طرف جارہا ہے۔ اس جہاز

ایک اور جہاز نظر آتا ہے جو اسی شرح سے چل رہا ہے۔ پہلے جہاز والوں کو دوسرا جہاز ہمیشہ قریب آتا ہوا معلوم ہوتا ہے اور ہمیشہ عین مشرق کی طرف دکھائی دیتا ہے۔ دوسرے جہاز کی سمت حرکت معلوم کرو۔

(۱۶) ایک ذرہ جس کی لچک کامل ہے افق سے زاویہ عہ بناتا ہوا پھینکا جاتا ہے۔ ایک چکنی سطح نقطہ رمی میں سے گذرتی ہے اور افق سے بزاویہ عہ مائل ہے۔
ثابت کرو کہ ذرہ نقطہ رمی پر واپس آجائیگا بشرطیکہ مم عہ مم (ط-عہ) صحیح عدد ہو۔

(۱۷) ایک ذرہ سکون سے شروع ہوکر ایک خط مستقیم میں اس طرح چلتا ہے کہ اس کی حرکت میں باری باری اسراع ع اور ابطاء عَ ہوتا ہے۔ اسراع اور ابطاء کی مدت ہر دفعہ مساوی ہوتی ہے اور وقت و کے برابر ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ ۲ن ایسی مدتوں میں یہ فاصلہ طے ہوگا۔

$$\frac{ن و^{۲}}{۲}\left[(۲ن+۱)\,ع-(۲ن-۱)\,عَ\right]$$

(۱۸) ایک ذرہ ایک کھردری افقی سطح پر رکھا ہے۔ ذرے اور سطح کے درمیان قدر فرک ل ہے۔ سطح ایک عمودی محور کے گرد گھوم سکتی ہے۔ محور سے ذرے کا فاصلہ ا ہے۔ دریافت کرو کہ سطح زیادہ سے زیادہ کتنی گردشیں فی منٹ کرسکتی ہے کہ ذرہ بلحاظ سطح کے حرکت نہ کرے۔

(۱۹) ایک توپ کے گولے کا ٹپہ افقی سطح پر ح ہے۔ جن دو راستوں سے یہہ ٹپہ حاصل ہوتا ہے ان کی بڑی سے بڑی بلندیاں ی اور یَ ہیں۔ ثابت کرو کہ ح =

$$\text{۴}\sqrt{\text{ی یَ}}$$ ۔

(۲۰) ایک جھولے کی رسیاں ایک آدمی کے وزن کا دوگنا حالت سکون میں سہار سکتی ہیں تو معلوم کرو کہ وہ آدمی اس جھولے میں زیادہ سے زیادہ کتنے زاوئے میں جھول سکتا ہے؟

(۲۱) دو جسم جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں ایک رسی کے ذریعہ سے بندھے ہیں اور رسی جس کا طول معلوم ہے ایک چھوٹے حلقے میں سے گذرتی ہے۔ حلقہ ایک عمودی محور کے گرد بلا تکلف حرکت کرسکتا ہے۔ مَ کو اس طرح حرکت دی جاتی ہے کہ وہ تو زاویئی رفتار ھ سے ایک افقی دائرے میں گھومے اور م حالت سکون میں رسی سے لٹکتا رہے۔ ثابت کرو کہ مَ کا فاصلہ حلقے سے $\frac{\text{م ج}}{\text{مَ ھ}^{2}}$ ہے۔

(۲۲) دو بے لچک گولے ناپ میں ایک سے ہیں لیکن انکی کمیتیں م اور مَ ہیں اور وہ آپس میں مس کرتے ہوئے ایک چکنی میز پر پڑے ہیں۔ اب م کو چوٹ لگائی جاتی ہے لیکن اس طرح کہ اس کی سمت خط مرکزین سے زاویہ عہ بنائے۔ تو اس صورت میں گولوں کی توانائی بالفعل کی

نسبت دوسری صورت کی توانائی بالفعل سے جبکہ انکی جگہیں آپس میں بدل دی جائیں اور مَ کو چوٹ لگائی جائے یہہ ہوگی

$$\frac{\text{مَ}\left(\text{م} + \text{مَ جب}^2\ \text{عہ}\right)}{\text{م}\left(\text{مَ} + \text{م جب}^2\ \text{عہ}\right)} \text{ -}$$

(۲۳) ایک وزنی ذرہ رفتار ر سے پھینکا جاتا ہے اور ایک سطح مائل سے ۴۵° کے زاویہ پر ٹکراتا ہے۔ اس سطح کا میلان افق سے بہ ہے اور یہہ نقطہ رمی میں سے گذرتی ہے۔ ثابت کروکہ جہاں ذرہ ٹکراتا ہے اس مقام کی بلندی نقطہ رمی سے یہہ ہے

$$\frac{\text{ر}^2}{\text{ج}} \times \frac{1 + \text{ھم بہ}}{2 + 2\,\text{ھم بہ} + \text{ھم}^2\,\text{بہ}}$$

(۲۴) ایک لچکدار جسم ایک نقطے سے رفتار ر سے پھینکا جاتا ہے اور ایک عمودی دیوار سے ٹکراکر نقطہ رمی پر پھر واپس آجاتا ہے۔ ثابت کروکہ اس نقطے کا فاصلہ دیوار سے

$$\frac{\text{ل}}{1+\text{ل}} \times \frac{\text{ر}^2}{\text{ج}}$$ سے کم ہونا چاہئے۔ جہاں ل لچک کی قدر ہے۔

(۲۵) دو ذرے جن کی کمیتیں م اور مَ ہیں متوازی مستقیم خطوں میں حرکت کررہے ہیں۔ خطوں کا فاصلہ ا ہے اور ذروں کی رفتاریں ر اور رَ ہیں۔ دونو ذرے ایک رسی سے بندھے ہیں جس کا طول ایسا ہے کہ جب رسی کس

جاتی ہے تو اس کا میلان متوازی خطوں سے عہ ہوتا ہے۔ یہہ تسلیم کرکے کہ ل > لَ ثابت کرو کہ جس وقت رسی کستی ہے اس وقت رسی میں صدمہ کا تناؤ یہہ ہوگا

$$\frac{\text{م م}َ}{\text{م} + \text{م}َ}\ (\text{ل} - \text{ل}َ)\ \text{جتم عہ}$$

(۲۶) ایک چکنا فانہ جس کی کمیت م ہے ایک افقی سطح پر پڑا ہے اور ایک ذرہ جس کی کمیت ن ہے فانے کے مائل پہلو پر نیچے کی طرف پھسلتا ہے۔ اس پہلو کا میلان افق سے عہ ہے۔ ثابت کرو کہ ذرے کا اسراع بلحاظ افقی پہلو کے

$$\frac{\text{م} + \text{ن}}{\text{م} + \text{ن جب}^2\text{عہ}} \times \text{ج جب عہ}$$ ہے۔

(۲۷) ایک ذرہ ایک چکنے فانے کے مائل پہلو پر پڑا ہے۔ فانہ ایک افقی میز پر پھسل سکتا ہے۔ دریافت کرو کہ فانے کو کس طرح حرکت دی جائے کہ ذرہ نہ اوپر جائے اور نہ نیچے جائے۔ ساتھ ہی فانے اور ذرے کے درمیان دباؤ دریافت کرو۔

(۲۸) ایک ذرہ جس کی کمیت م_1 ہے ایک رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے۔ ایک دوسرا ذرہ جس کی کمیت م_2 ہے رسی کے نقطہ وسط سے بندھا ہے۔ رسی کا دوسرا سرا ایک افقی میز پر ایک ثابت نقطے سے بندھا ہے۔ دونو ذروں کو اس طرح حرکت دی جاتی ہے

که رسی کے دونو حصے ایک ہی خط مستقیم میں رہتے ہیں
اور ذرے افقی دائروں میں حرکت کرتے ہیں - ثابت کرو کہ
رسی کے دونو حصوں کے تناؤں کی نسبت یہہ ہو گی -

$$۲ م_۱ + م_۲ : ۲ م_۱$$

(۲۹) ایک ہلکی رسی ایک چھوٹی ثابت چرخی پر سے گذرتی
ہے - رسی کے ایک سرے سے ۳ پونڈ کا وزن لٹکتا ہے
اور دوسرے سرے سے ایک ہلکی چرخی لٹکتی ہے - اس
چرخی پر ایک اور ہلکی رسی گذرتی ہے جس کے سروں سے
۲ پونڈ اور ایک پونڈ کے وزن لٹکتے ہیں - یہہ کل نظام
حالت سکون سے چھوڑ دیا جاتا ہے - تو دوران حرکت میں
ثابت چرخی پر کا دباؤ معلوم کرو اور وزن اعظم کا اسراع
دریافت کرو -

(۳۰) تین بے وزن حرکت پذیر چرخیوں کا ایک ایسا نظام
ہے جس میں تمام رسیاں ایک سلاخ سے بندھی ہیں اور
بلند ترین رسی ایک ثابت چرخی پر سے گذر کر دوسری طرف
۳ پونڈ کا وزن سہارتی ہے اور پست ترین رسی سے ۲۸
پونڈ کا وزن لٹکتا ہے - ثابت کرو کہ بڑا وزن $\frac{ج}{۵۵}$ کے
اسراع سے نیچے کی طرف حرکت کرے گا -

(۳۱) دو ریل کی سڑکیں ایک دوسرے کو قطع کرتی ہیں
اور ان کا درمیانی زاویہ ع ہے - دو ریل گاڑیاں سڑکوں
کے مقام تقاطع کی طرف رفتاروں ر اور س سے

چل رہی ہیں - اگر گاڑیوں کے ابتدائی فاصلے مقام تقاطع سے ا اور ب ہوں تو ثابت کرو کہ دوران حرکت میں گاڑیوں کا اقل فاصلہ ایک دوسرے سے یہہ ہوگا

$$\frac{(\text{ا س} - \text{ب ر}) \text{ جب ع}}{\sqrt{\text{ر}^2 + \text{س}^2 - 2\text{ر س جم ع}}}$$

(۳۲) اگر دو متحرک نقطوں کا درمیانی فاصلہ کسی وقت ا ہو اور ر ان کی اضافی رفتار ہو اور ر کے اجزاء ا کی سمت میں اور ا پر عمود بالترتیب س اور ص ہوں - تو ثابت کرو کہ دونو نقطوں کا اقل ترین باہمی فاصلہ $\frac{\text{ا ص}}{\text{ر}}$ ہے اور یہہ فاصلہ وقت $\frac{\text{ا س}}{\text{ر}^2}$ گذرنے کے بعد ہوگا -

(۳۳) دو ذرے جن کی کمیتیں ن اور م + ن ہیں ایک ہلکی رسی کے سروں سے بندھے ہیں اور ایک دوسرے کے قریب ایک چکنی میز پر رکھے ہیں - یہہ رسی ایک ہلکی چکنی چرخی پر چڑھی ہوئی ہے اور چرخی ایک جسم کو سہارتی ہے جس کی کمیت ن ہے - اس جسم کو میز کے کنارے کے اوپر سے چھوڑ دیا جاتا ہے - چرخی کا اسراع معلوم کرو -

(۳۴) چرخیوں کے ایک نظام میں جو سلاخ کہ بوجھ کو سہارتی ہے اس سلاخ سے ہر ایک رسی بندھی ہے - اگر اس نظام میں دو حرکت پذیر ہلکی چرخیاں ہوں اور زور کو چوگنا کردیا جائے

تو ثابت کرو کہ بوجھ کا اسراع اوپر کی طرف $\frac{\text{۳ ج}}{\text{۲۹}}$ ہو گا۔

(۳۵) ایک رسی کا ایک سرا ثابت ہے اور اس رسی پر ۳ پونڈ کمیت کا ایک حلقہ چڑھا ہے۔ رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذر کر اپنے دوسرے سرے پر ایک پونڈ کمیت کے ایک جسم کو سہارتی ہے۔ ثابت کرو کہ حلقہ، اسراع $\frac{\text{ج}}{\text{۷}}$ سے نیچے کی طرف حرکت کریگا اور رسی کا تناؤ $\frac{\text{۲}}{\text{۷}}$ ۱ پونڈ وزن ہو گا۔

(۳۶) ایک سائیکل سوار رفتار ر سے ایک سڑک پر جا رہا ہے اور اسی سڑک پر کچھ فاصلہ آگے ایک شخص رفتار س سے پیدل جا رہا ہے۔ سوار اور پیدل دونو ایسے متوازی خطوط مستقیم میں جا رہے ہیں جن کا باہمی فاصلہ ف ہے۔ ثابت کرو کہ اگر سائیکل سوار فاصلہ $\frac{\text{ر ف}}{\text{س}}$ سے کم پر گھنٹی بجائے تو وہ اپنی رفتار کو کم کئے بغیر پیدل کے پاس سے بغیر ادجھٹر کے گذر جائے گا خواہ پیدل اپنے راستے کو چھوڑ بھی دے۔

(۳۷) ایک لڑکا ہوا میں ایک پتھر رفتار ر سے بزاویہ ارتفاع عہ پھینکتا ہے۔ مدت بقدر $\frac{\text{۲ ر رَ جب (عہ - عہَ)}}{\text{ج [ر جم عہ + رَ جم عہَ]}}$ گذرنے کے بعد وہ

ایک اور پتھر رفتار لَ سے بزاویہ ارتفاع عَہ پھینکتا ہے۔ ثابت کرو کہ دوسرا پتھر پہلے سے ٹکرائے گا۔

(۳۸) م کمیت کی ایک گولی ایک ثابت تختے کے اندر بقدر فاصلہ ف گھس جاتی ہے۔ تختے کی کمیت ن ہے۔ اگر تختہ بلا تکلف حرکت کر سکے تو ثابت کرو کہ

گولی اس کے اندر بقدر فاصلہ $\frac{ن ف}{م + ن}$ داخل ہوگی۔

(۳۹) ایک رسی ایک سرے سے کمیت ط کا جسم سہارتی ہے پھر ایک ثابت چرخی کے اوپر سے گذر کر ایک حرکت پذیر چرخی کے نیچے سے گذرتی ہے اور پھر ایک ثابت چرخی پر سے گذر کر دوسرے سرے سے کمیت ق کا ایک جسم سہارتی ہے۔ حرکت پذیر چرخی سے کمیت ع کا ایک جسم لٹکتا ہے۔ یہہ فرض کر کے کہ رسی اور چرخیاں بے وزن ہیں اور رسی کے جو حصے چرخیوں سے مس نہیں کرتے وہ عمودی ہیں ع کا اسراع اور رسی کا تناؤ دریافت کرو۔

(۴۰) ایک فانہ جس کی کمیت ن ہے ایک افقی چکنی سطح پر پھسل سکتا ہے اور اسی کا ایک پہلو افق سے بزاویہ عہ مائل ہے۔ ابتدا میں فانہ ساکن ہے اور ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے اس کے مائل پہلو پر اوپر کی طرف پھسلنے کے لئے حرکت دیا جا ہے۔ اگر ذرہ نقطہ

رمی سے بلندی ی تک چڑھے تو ثابت کرو کہ رفتار رمی یہہ ہو گی

$$\left\{ ۲ \text{ ج ی } \frac{\text{م + ن}}{\text{ن + م جب}^۲\text{عہ}} \right\}^{\frac{۱}{۲}}$$

(۴۱) ایک ذرہ ایک کھردری مائل سطح پر ساکن ہے۔ قدر فرک ر ہے اور سطح کا میلان افق سے عہ ہے۔ سطح پر جس طرف ذرہ رکھا ہے اس سے دوسری طرف سطح کو افقی سمت میں یکساں اسراع ع سے حرکت دیجاتی ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ بلحاظ سطح کے ساکن رہے گا اگر

$$\text{ع} < \frac{\text{ر ج جم عہ - ج جب عہ}}{\text{جم عہ + ر جب عہ}}$$

(۴۲) ایک منتظم مسدس زمین پر کھڑا ہے اور اس کا ایک ضلع زمین کو مس کرتا ہے۔ ایک ذرہ اس طرح پھینکا جاتا ہے کہ اس کے اوپر کے چار کونوں سے عین چھوتا ہوا جائے۔ ثابت کرو کہ زمین پر پہنچنے کے وقت ذرے کی جو رفتار ہوگی اس کی نسبت ذرے کی اقل رفتار سے $\sqrt{۳۱} : \sqrt{۳}$ ہو گی۔

(۴۳) ایک جسم کا وزن ایک آدمی کے وزن سے ڈیوڑھا ہے۔ اس کو اٹھانے کے لئے آدمی اس سے ایک رسی باندھتا ہے اور رسی کو ایک چرخی پر سے گذارتا ہے

پھر رسی پر چڑھنا شروع کرتا ہے۔ آدمی کا اسراع اوپر کی طرف بلحاظ رسی کے $\frac{\text{۶ ج}}{\text{۷}}$ ہے۔ ثابت کرو کہ جسم اسراع $\frac{\text{ج}}{\text{۷}}$ سے اوپر اٹھیگا۔ رسی کا تناؤ بھی دریافت کرو۔

(۴۴) ایک خانہ جس کی کمیت ن اور زاویہ عہ ہے ایک چکنی افقی سطح پر بلا تکلف حرکت کرسکتا ہے۔ ایک چکنا کرہ جس کی کمیت م ہے خانے کے مائل پہلو کی عمودی سمت میں ٹکراکر اچھلتا ہے۔ ثابت کرو کہ تصادم سے عین پہلے اور تصادم کے عین بعد کرے کی رفتاروں کی نسبت یہہ ہوگی

$$\text{ن} + \text{م جب}^{2}\,\text{عہ} : \text{ل ن} - \text{م جب}^{2}\,\text{عہ}$$

اس میں ل لچک کی قدر ہے۔

(۴۵) ایک ہلکی چکنی چرخی پر ایک رسی گذرتی ہے جسکے ایک سرے سے ۴ پونڈ کمیت کا ایک جسم لٹکتا ہے اور دوسرے سرے سے ایک پونڈ کمیت کی ایک چرخی لٹکتی ہے۔ اس چرخی پر ایک رسی گذرتی ہے جس کے سروں سے بالترتیب ۲ پونڈ اور ۳ پونڈ کمیت کے جسم لٹکتے ہیں ثابت کرو کہ ۴ پونڈ کے جسم کا اسراع $\frac{\text{۹ ج}}{\text{۴۹}}$ ہوگا۔

(۴۶) ایک رسی کا اصلی طول ا ہے اس کے سرے ایک چکنی میز پر دو ثابت نقطوں سے باندھے گئے ہیں اور اس طرح

رسی کھچ جاتی ہے۔ دونو نقطوں کا درمیانی فاصلہ ن ا ہے۔
ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے رسی کے نقطہ وسط سے
باندھا گیا ہے۔ ذرے کو پکڑ کر رسی کی سیدھ میں کھینچا
جاتا ہے لیکن اس قدر کہ اس کی نقل مکان $\frac{ن - ۱}{۲}$ ا
سے زیادہ نہ ہو۔ ذرے کو اسطرح کھینچ کر چھوڑ دیا جاتا
ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ اہتزازی حرکت کرے گا اور یہہ کہ
اس کی مدت اہتزاز کا انحصار نہ تو ن پر ہے اور نہ اس
فاصلے پر جہاں تک ذرہ کھینچ کر چھوڑا گیا تھا۔

(۴۷) جو توانائی بالفعل کہ ۵ پونڈ کا جسم حالت سکون سے
۵۰ فٹ گر کر حاصل کرتا ہے اگر وہ توانائی بالفعل کی اکائی
لی جائے اور جو معیار حرکت یہی جسم حاصل کرتا ہے وہ معیار
حرکت کی اکائی لی جائے۔ اور جتنے فاصلہ تک کہ جسم
گرا ہے وہ طول کی اکائی ہو تو وقت کی اکائی دریافت کرو۔

(۴۸) ایک ذرہ ط ایک دائرے میں حرکت کرتا ہے۔
و ا دائرے کا ایک قطر ہے۔ ط پر کے مماس پر
و سے و ی عمود نکالا گیا ہے۔ ثابت کرو کہ ی کی
رفتار بلحاظ ط کے، ط کی رفتار کے مساوی ہے۔

(۴۹) ایک چکنی چرخی زمین سے بلندی ی پر نصب
کی گئی ہے اور اس پر سے ایک بے وزن بے لچک
رسی گذرتی ہے۔ رسی کے ایک سرے سے ایک آدمی
جس کی کمیت ن ہے لٹکتا ہے اور دوسرے سرے سے

کمیت م + ن کا ایک آدمی لٹکتا ہے ۔ دونو ایک ہی وقت یکساں اسراعوں سے اوپر چڑھنا شروع کرتے ہیں ۔ اگر ہلکا آدمی و ثانیہ میں چرخی تک پہنچ جائے تو

ثابت کرو کہ بھاری آدمی کا فاصلہ چرخی سے $\frac{م}{م+ن}\left[\frac{ج و^۲}{۲}+ی\right]$

سے کم نہیں ہو سکتا ۔

(۵۰) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ن ہے یکساں رفتار سے ایک ہموار سڑک پر چل رہی ہے ۔ سب سے پیچھے کا ڈبہ جس کی کمیت م ہے گاڑی سے علٰحدہ ہو جاتا ہے اور ڈرایور (گاڑی چلانے والے) کو اس کا علم فاصلہ ل طے کرنے کے بعد ہوتا ہے اور وہ اس وقت انجن کی بھاپ بند کردیتا ہے ۔ ثابت کرو کہ جس وقت گاڑی کے دونو حصے ساکن ہونگے اس وقت ان کا درمیانی

فاصلہ $\frac{ن ل}{ن - م}$ ہوگا ۔ یہہ تسلیم کرلیا جائے کہ مزاحمت یکساں ہے اور وزن کے متناسب ہے اور انجن کی قوت بھی یکساں ہے ۔

(۵۱) ایک چھوٹی چکنی چرخی جس کی کمیت ن ہے ایک چکنی میز پر پڑی ہے ایک ہلکی رسی چرخی پر سے گذر کر اپنے دونو سروں سے دو جسم (کمیت م اور مَ) سہارتی ہے ۔ رسی کے دونو حصے میز کے کنارے پر عمود ہیں اور

دونو جسم کنارے پر سے نیچے لٹک رہے ہیں۔ ثابت کرو کہ
چرخی کا اسراع

$$\frac{\text{۴ م مَ ج}}{\text{ن (م + مَ) + ۴ م مَ}}$$ ہو گا

(۵۲) افقی سمت میں ہوا کے چلنے سے ایک مرئی میں
اسراع ع ہوا کی سمت میں پیدا ہوتا ہے۔ اگر ایک
ذرہ رفتار ر سے افق سے زاویہ عہ بناتا ہوا پھینکا جائے
اور ہوا کی فراحمت کے اثر کو نظر انداز کیا جائے اور ذرے
کی حرکت ایسی عمودی سطح میں ہو جو ہوا کی حرکت کی سمت
میں سے گذرتی ہے تو ثابت کرو کہ ذرے کے طریق کا وتر خاص

$$\frac{\text{۲ ر}^{۲}\text{ (ج جم عہ + ع جب عہ)}^{۲}}{\text{(ع}^{۲}\text{ + ج}^{۲}\text{)}^{\frac{۳}{۲}}}$$ ہو گا

(۵۳) ایک ذرہ ایک چکنی افقی میز پر ایک چکنے فانے کے
پائے سے مس کرتا ہوا پڑا ہے۔ فانے کا زاویہ عہ اور
اس کی بلندی ی ہے۔ فانے کو میز پر یکساں اسراع ع
سے حرکت دی جاتی ہے۔ اگر ع > ج مس عہ تو
ثابت کرو کہ ذرہ فانے کے مائل پہلو پر چڑھ سکیگا۔ اگر فانہ
اسی طرح و ثانیہ حرکت کرے اور پھر رفتار محصلہ سے
یکساں حرکت کرے تو ذرہ عین چوٹی پر پہنچ جائے گا بشرطیکہ

$$\text{و}^{۲} = \frac{\text{۲ ج ی قط عہ}}{\text{ع (ع جم عہ - ج جب عہ)}}$$

(۵۴) ۱۰ پونڈ اور ۲ پونڈ کے وزن ایک چرخ و محور پر عمودی رسیوں کے ذریعہ سے توازن میں لٹکتے ہیں۔ اگر ایک پونڈ کا وزن چھوٹے وزن کے ساتھ باندھ دیا جائے تو وہ اسراع دریافت کرو جس سے چھوٹا وزن نیچے کو حرکت کرے گا اور رسیوں کا اسراع بھی معلوم کرو۔ چرخ اور محور کو بے وزن تصور کیا جائے۔

(۵۵) ایک تفریقی چرخ و محور میں ﮈ چرخ کا نصف قطر ہے۔ اور ا اور ب محور کے دونو حصوں کے نصف قطر ہیں۔ اگر چرخ کی رسی سے وزن ط لٹکایا جائے تو نظام متوازن ہوتا ہے۔ اگر ط کو دوگنا کردیا جائے تو

ثابت کروکہ وہ اسراع $\frac{۲\ ج\ ﮈ}{ا - ب + ۴\ ﮈ}$ سے نیچے کو حرکت کرے گا۔ چرخ اور محور کو بے وزن تسلیم کرلیا جائے۔

(۵۶) ایک ذرہ جس کی لچک کامل ہے رفتار ر سے ایک عمودی سطح میں پھینکا جاتا ہے۔ یہ عمودی سطح ایک مائل سطح کے ایک خطِ میلانِ اعظم میں سے گذرتی ہے۔ سطح مائل کا میلان افق سے عہ ہے۔ اگر ذرہ سطح مائل سے ٹکرا کر عمودی سمت میں اچھلے تو ثابت کروکہ

وقت $\frac{۶\ ر}{ج\ [۱ + ۸ جب^۲ عہ]^{\frac{۱}{۲}}}$ گذرنے کے بعد ذرہ نقطۂ رمی پر واپس آجائے گا۔

(۵۷) ایک چکنی ثابت چرخی پر رسی چڑھی ہوئی ہے اور رسی کے سروں سے دو چرخیاں لٹکتی ہیں جن میں سے ہر ایک کی کمیت م ہے ایک اور رسی جس کے سروں سے ۲ م اور ۳ م کمیتوں کے جسم لٹکتے ہیں ان دونو چرخیوں میں سے ایک چرخی پر چڑھی ہوئی ہے اور ایک تیسری رسی جس کے سروں سے م اور ۴ م کمیتوں کے جسم لٹکتے ہیں دوسری حرکت پذیر چرخی پر چڑھی ہوئی ہے۔ اگر یہ نظام حرکت کرنے کے لئے آزاد ہو تو ثابت کرو کہ ہر ایک حرکت پذیر چرخی کا اسراع $\frac{۴ ج}{۲۵}$ ہے۔

(۵۸) ایک منکا ایک کھردرے عمودی حلقے پر چڑھا ہوا ہے۔ حلقہ اپنی سطح میں اپنے مرکز کے گرد گردش کرتا ہے۔ اس کی زاویئی رفتار یکساں رہتی ہے اور $\sqrt{\frac{ج}{ا}}\left[1+\frac{1}{ر^2}\right]^{\frac{1}{4}}$ سے نہیں بڑھتی۔ جہاں ا حلقے کا نصف قطر ہے اور ر قدر فرک ہے۔ ثابت کرو کہ منکا نہیں پھسلیگا۔

(۵۹) ایک ذرہ ایک عمودی حلقے کے اندر اس کے پست ترین نقطے سے ایسی رفتار سے پھینکا جاتا ہے کہ وہ حلقے کے اندر اس کے محیط پر کچھ فاصلہ طے کرکے حلقے کو چھوڑ دیتا ہے اور پھر واپس نقطۂ رمی پر پہنچ جاتا ہے۔ رفتار رمی دریافت کرو اور یہ بھی معلوم کرو کہ ذرہ حلقے کو

کس مقام پر چھوڑے گا ؟

(۶۰) ایک ذرہ ایک رسی کے ذریعہ سے ایک ثابت نقطے سے لٹکتا ہے۔ رسی کا طول ا ہے۔ ذرے کو وضع توازن سے حرکت دی جاتی ہے۔ رفتار رمی وہ رفتار ہے جو بلندی ا+ب سے گرکر حاصل ہوتی ہے۔ اگر ۲ب > ۳ا تو ثابت کرو کہ رسی وقت و گزرنے تک ڈھیلی رہے گی جہاں و مساوات ذیل سے حاصل ہوتا ہے

$$\text{۲۷ ج } \text{ا}^{۲} \text{و}^{۲} = \text{۳۲ ب } (\text{۹ ا}^{۲} - \text{۴ ب}^{۲})$$

(۶۱) ایک وزنی ذرہ ایک لچکدار رسی کے ایک سرے سے بندھا ہے اور رسی کا دوسرا سرا ثابت ہے۔ رسی کی لچک کا مقیاس ذرے کے وزن کے مساوی ہے۔ رسی کو نیچے کی طرف شاقولی سمت میں اس قدر کھینچا جاتا ہے کہ رسی کا طول اصلی طول سے چوگنا ہو جاتا ہے۔ رسی کو اس طرح کھینچ کر چھوڑ دیا جاتا ہے۔ ثابت کرو کہ ذرہ اس مقام پر

وقت $\sqrt{\frac{\text{ا}}{\text{ج}}} \left[\text{۲} \sqrt{\text{۳}} + \frac{\text{۴}\pi}{\text{۳}} \right]$ میں واپس آجائے گا

جہاں ا رسی کا اصلی طول ہے۔

(۶۲) ایک ہلکی رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے اور اس کے سروں پر حلقے ہیں جن میں ایک ایک آدمی بیٹھا ہے۔ ہر ایک آدمی کی کمیت م ہے۔ ایک آدمی (ا) دوسرے (ب) سے ی فٹ بلند ہے۔ ب کے

ہاتھ میں $\frac{\text{م}}{\text{۱۰}}$ کمیت کا ایک گولہ دیا جاتا ہے جو کہ ب فی الفور ا کی طرف اس قدر رفتار سے پھینکتا ہے کہ گولہ عین ا تک پہنچ جاتا ہے۔ اور ا اس کو پکڑ لیتا ہے۔ ثابت کرو کہ گولے کو پکڑنے سے پہلے ا، فاصلہ بقدر $\frac{\text{۲ ی}}{\text{۱۹}}$ اوپر وار طے کر چکیگا اور ا کی اوپر وار حرکت، فاصلہ بقدر $\frac{\text{۵۹ ی}}{\text{۳۶۱}}$ طے کرنے کے بعد بند ہو گی۔

(۶۳) ایک چکنا حلقہ جس کی کمیت ن ہے ایک رسی پر چڑھا ہے اور رسی کے سرے دو چکنی ثابت چرخیوں پر سے گذر کر دو جسموں م اور مَ کو سہارتے ہیں۔ رسی کے مختلف حصے عمودی ہیں۔ کل نظام حرکت کرنے میں آزاد ہے۔

ثابت کرو کہ حلقہ ساکن رہے گا بشرطیکہ $\frac{\text{۴}}{\text{ن}} = \frac{\text{۱}}{\text{م}} + \frac{\text{۱}}{\text{مَ}}$

(۶۴) ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے ایک چکنے فانے کے مائل پہلو پر رکھا ہے۔ فانے کی کمیت ن ہے اور وہ ایک چکنی افقی میز پر پڑا ہے۔ فانے کو ایک رسی کے ذریعہ سے افقی سمت میں کھینچا جاتا ہے اس طرح کہ رسی ایک چکنی چرخی پر سے گذرتی ہے اور اس کے دوسرے سرے سے ایک جسم (کمیت نَ) لٹکتا ہے۔ کل نظام حرکت کرنے میں آزاد ہے اور حرکت ایک ایسی عمودی سطح میں ہوتی ہے جو فانے کے ایک خطِ میلانِ اعظم میں سے گذرتی ہے۔

ثابت کرو کہ ذرے کا اسراع بلحاظ فانے کے

$$\frac{\text{(ن + نَ + م) جب عہ + نَ جم عہ}}{\text{ن + نَ + م جب}^2\text{عہ}} \;\text{ج ہے}$$

جہاں عہ فانے کے مائل پہلو کا میلان ہے۔ ساتھ ہی دریافت کرو کہ فانے پر م کا کس قدر دباؤ پڑتا ہے؟

(۶۵) ایک چکنا فانہ ایک افقی سطح پر پڑا ہے اور وہ سطح پر اپنے خطوط میلان اعظم کے ظلوّں کی سمت میں حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ ایک ذرہ فانے کے مائل پہلو پر حرکت کرنے کے لئے پھینکا جاتا ہے۔ ذرے کی سمتِ رمی خطوطِ میلانِ اعظم سے مائل ہے۔ ثابت کرو کہ سطح پر ذرے کی حرکت کا راستہ قطع مکافی ہوگا۔

(۶۶) ایک گولی جس کی لچک کامل ہے ایک مائل سطح کے پائے سے پھینکی جاتی ہے۔ اگر گولی نقطہ رمی سے فاصلہ ف پر سطح مائل سے ٹکراکر اچھلے اور پھر اسی راستے سے واپس آئے جس راستے سے گئی تھی تو ثابت کرو کہ

$$\text{رفتارِ رمی} \sqrt{\frac{\text{ج ف (۱ + ۳ جب}^2\text{عہ)}}{\text{۲ جب عہ}}} \;\text{ہے۔ جہاں عہ}$$

سطح کا میلان ہے۔

(۶۷) ایک وزنی جسم جس کی کمیت ن ہے ایک افقی تختی پر حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اس کو ایک کمانی کے

ذریعہ سے ایک ثابت نقطے سے باندھا جاتا ہے۔ ثابت نقطے کا فاصلہ تختی سے ف ہے اور کمانی کا اصلی طول ا ہے۔ ا، ف سے کم ہے۔ کمانی کی لچک ایسی ہے کہ اگر ایک جسم (کمیت م) اس سے لٹکائیں تو اس کا طول بقدر ط بڑھ جاتا ہے۔ اگر ن کو تھوڑا سا اپنی جگہ سے ہٹاکر چھوڑ دیں تو ثابت کروکہ ایک چھوٹے سے اہتزاز کی

$$\text{مدت}\ 2\pi\left\{\frac{\text{ن ط ف}}{\text{م ج (ف - ا)}}\right\}^{\frac{1}{2}}\ \text{ہو گی۔}$$

(۶۸) ایک ریل گاڑی ایک منحنی پر رفتار ل سے چل رہی ہے۔ منحنی کا نصف قطر ن ہے۔ اگر ریل کی سڑک افقی اور ہموار ہو اور ریل گاڑی کے مرکز جمود کی بلندی ریل کی سڑک سے ی ہو اور ریلوں کے درمیان فاصلہ ۲ا ہو تو ثابت کروکہ اگر

$$\text{ل} > \sqrt{\frac{\text{ج ن ا}}{\text{ی}}}$$

تو ریل گاڑی الٹ جائے گی۔

(۶۹) ایک فانہ جس کی کمیت ن ہے ایک افقی میز پر پڑا ہے۔ فانے کا وہ پہلو جو میز سے مس کرتا ہے کھردرا ہے اور جو پہلو مائل ہے وہ چکنا ہے۔ مائل پہلو کا میلان عہ ہے۔ میز اور فانے کے درمیان زاویہ فرک فہ ہے۔ ایک ذرہ جس کی کمیت م ہے چکنے پہلو پر نیچے کی طرف

پھسلتا ہے - وہ شرط دریافت کرو جس کے پورا ہونے سے فانہ حرکت کر سکے - اور ثابت کرو کہ اگر فانہ حرکت کرے تو اس کا اسراع

$$\frac{\text{م جم عہ جب (عہ - فہ) - ن جب فہ}}{\text{ن جم فہ + م جب عہ جب (عہ - فہ)}}\ \text{ج}$$ ہوگا۔

(۷۰) ایک کھڑکی کو دو رسیاں سہارتی ہیں - رسیاں چرخیوں پر سے گذر کر اپنے دوسرے سروں سے ایک ایک وزن سہارتی ہیں - ہر ایک وزن کھڑکی کے نصف وزن کے مساوی ہے۔ کھڑکی اپنے چوکھٹے میں کھیلتی ہوئی آتی ہے۔ اب ایک رسی ٹوٹ جاتی ہے اور کھڑکی اسراع ع سے نیچے اترتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ع} = \frac{\text{ا - ب ر}}{\text{۲ ا + ب ر}}\ \text{ج}$$ جہاں ر قدر فرک ہے

اور ا کھڑکی کی بلندی اور ب اس کا عرض ہے۔

(۷۱) ۳۰۰ پونڈ کے وزن کو ایک عمودی قوت کے ذریعہ سے اٹھایا جاتا ہے - جوں جوں وزن اوپر چڑھتا ہے قوت حسب جدول ذیل بدلتی ہے۔

بلندی زمین سے فٹوں میں	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
اٹھانیوالی قوت پونڈوں کے وزن میں	۴۵۰	۳۲۰	۲۷۰	۴۱۰	۴۸۰	۶۱۰	۹۰۰

زمین سے ۵ء۵ فٹ کی بلندی پر دریافت کرو (۱) جسم کی توانائی بالقوہ (۲) جسم کی توانائی بالفعل (۳) اس کام کی مقدار جو قوت نے کیا۔

(۷۲) ۱۰ پونڈ کمیت کا ایک جسم ایک کمانی کے ذریعہ سے زمین سے وصل کیا گیا ہے۔ کمانی ایسی ہے کہ ۱۰ پونڈ وزن لٹکانے سے ایک انچ بڑھتی ہے۔ جسم ایک قوت کے ذریعہ سے اوپر وار اٹھایا جاتا ہے۔ قوت مختلف بلندیوں پر حسب جدول ذیل بدلتی ہے۔

بلندی انچوں میں	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶
قوت پونڈوں کے وزن میں	۲۲	۳۶٫۲	۴۴٫۵	۴۹	۵۲	۵۱٫۸	۴۸

۲ انچ اور ۴ انچ کی بلندیوں پر بالترتیب جسم کی توانائی بالفعل اور توانائی بالقوہ دریافت کرو اور ۶ انچ کی بلندی پر اس کی رفتار معلوم کرو۔

(۷۳) ایک انجن ایک نل کے ذریعہ سے پانی نکالتا ہے۔ جس وقت پانی نل میں سے نکلتا ہے اس وقت اسکی رفتار v ہے۔ ثابت کرو کہ انجن کے کام کرنے کی شرح اس طرح بدلتی ہے جس طرح v^3۔

(۷۴) ایک انجن کے پہیوں پر ۲۴ ٹن کا وزن ہے اور

پہیوں اور ریلوں کے درمیان قدر فرک $\frac{۱}{۴}$ ہے۔ اگر انجن کی اسپی طاقت ۷۰۰ ہو اور پہیے نہ پھسلیں تو ثابت کرو کہ گاڑی کی رفتار زیادہ سے زیادہ ۳۰ میل فی گھنٹہ ہوسکتی ہے۔

(۷۵) ایک ریل گاڑی جس کی کمیت ن ہے ایک اسٹیشن سے حالتِ سکون سے چل کر دوسرے اسٹیشن پر پہنچکر ساکن ہو جاتی ہے۔ دونو اسٹیشنوں کے درمیان فاصلہ ف ہے اور ریل گاڑی کو وقت و ثانیہ لگتا ہے۔ ریلوں وغیرہ کی رگڑ سے ع پونڈ وزن کے مساوی فراحمت ہوتی ہے۔ دونو اسٹیشنوں کے درمیان کچھ فاصلے تک انجن کی قوت مستقل رہتی ہے اور ط پونڈ وزن کے مساوی ہوتی ہے۔ ثابت کرو کہ

$$\text{ط} = \frac{\text{ع}^۲ \text{ج} \text{و}^۲}{\text{ع ج و}^۲ - ۲ \text{ن ف}}$$

$$\text{اور ط کی مدت عمل} = \text{و} - \frac{۲ \text{ن ف}}{\text{ع ج و}}$$

(۷۶) ایک سائیکل سوار اور اس کی مشین دونوں کی مجموعی کمیت ن پونڈ ہے۔ اگر ایک مائل سڑک پر نیچے کی طرف بغیر پاؤں چلانے کے سوار ا فٹ فی ثانیہ کی یکساں

رفتار سے جارہا ہو اور مائل سڑک کا میلان م میں ایک ہوتو ثابت کروکہ ایک ایسی مائل سڑک پر جس کا میلان ل میں ایک ہے اوپر کی طرف اسی رفتار سے جانے کے لئے اسکو اس شرح سے کام کرنا چاہئے

$$\frac{ر}{۵۵۰}\left[\frac{۱}{م}+\frac{۱}{ل}\right] ن$$

جو ایسی طاقت کے مساوی ہو۔

(۷۷) ایک سائیکل سوار ایک ہموار سڑک پر ۱۲ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتا ہے اور ۴۰ میں ایک میلان والی سڑک پر اوپر کی طرف ۵ میل فی گھنٹہ کی رفتار سے چلتا ہے۔ جو مزاحمت سڑک کے میلان کی مزاحمت کے علاوہ ہے وہ مستقل رہتی ہے۔ اس مزاحمت کو دریافت کرو اور یہہ بھی معلوم کرو کہ ۱۰۰ میں ایک میلان والی سڑک پر نیچے کی طرف اس کی رفتار زیادہ سے زیادہ کیا ہو گی۔ سوار اور اس کی مشین کی مجموعی کمیت مادہ ۱۸۰ پونڈ ہے اور وہ یکساں شرح سے کام کرتا ہے۔

(۷۸) لکڑی کے ایک کندے کی کمیت مادہ ن پونڈ ہے اور وہ حرکت کرنے میں آزاد ہے۔ اگر م پونڈ کمیت کی ایک گولی رفتار ر سے چلتی ہوئی اس کے مرکز ثقل کی سیدھ میں لگے تو دریافت کرو کہ گولی کے لگنے سے کندے کی کیا رفتار ہو گی؟

اگر گولی کندے میں ا فٹ گھس جائے اور گولی کی حرکت کے مقابل لکڑی کی مزاحمت یکساں ہو تو ثابت کرو کہ یہہ مزاحمت $\frac{\text{ن م}}{\text{ن + م}} \times \frac{\text{ر}^{2}}{\text{۲ ج ا}}$ پونڈ وزن کے مساوی ہے - اور یہہ کہ کندے میں داخل ہونے میں گولی کو $\frac{\text{۲ ا}}{\text{ر}}$ ثانیہ وقت لگیگا اور اس عرصہ میں کندہ $\frac{\text{م}}{\text{ن + م}}$ ا فٹ کے فاصلہ تک چلے گا +

جوابات

نمبری (۱)

(۴) ۱۰۰ فٹ (۵) ۱۲۰°

(۷) پانی کی دھار سے زاویہ جم$^{-1}(-\frac{۳}{۵})$ یعنی ۱۲۶° ۵۲′ بناتے ہوئے، پانی کی دھار پہ عمود یعنی اس کی حاصل سمت پانی کی دھار سے مس$^{-1}\frac{۵}{۴}$ یعنی ۵۹° ۲′ کا زاویہ بناتی ہے۔

(۸) $۴\sqrt{۳}$ میل فی گھنٹہ ، ۱۲ میل فی گھنٹہ

(۹) اب ممدودہ سے ۱۵۰° کا زاویہ بناتی ہوی سمت میں ، پندرہ منٹ کے بعد ۹ سے بزاویہ قائمہ ٹکر ہوگی۔

(۱۰) گاڑی کی حرکت کی سمت سے جم$^{-1}(-\frac{۱۱}{۱۵})$ کے زاویہ پر۔

(۱۱) مشرق سے شمال کی طرف زاویہ مس$^{-1}\frac{۴}{۳}$ پر ایک افقی خط کھینچو۔ اس افقی خط سے زاویہ ارتفاع مس$^{-1}\frac{۲}{۵}$ بناتی ہوئی سمت میں $\sqrt{۲۹}$

(۱۲) $(\sqrt{۳} - ۱)$ ب، $(\sqrt{۶} - \sqrt{۲})\frac{ب}{۲}$ جہاں ب رفتار ہے (۱۳) °۶۰

(۱۴) سب سے بڑی رفتار سے زاویہ $جم^{-۱}\frac{۱۳}{۱۴}$ بناتی ہوئی اور مقدار میں ۱۴۔

نمبری (۲)

(۱) ریل گاڑی کی حرکت کی سمت سے زاویہ $مس^{-۱}(-\frac{۳}{۴})$ بناتی ہوئی اور مقدار میں ۵۵ فٹ فی ثانیہ

(۲) ۲۰ میل فی گھنٹہ اور شمال سے مغرب کی جانب زاویہ $مس^{-۱}\frac{۳}{۴}$ بناتی ہوئی۔

(۳) ۱۵ میل فی گھنٹہ جانب شمال مشرق

(۴) ۱۰ میل فی گھنٹہ جانب جنوب مشرق

(۵) ۳۹ میل فی گھنٹہ مشرق سے شمال کی جانب زاویہ $جم^{-۱}\frac{۵}{۱۳}$ بناتی ہوئی

(۶) $۳۲\frac{۸}{۱۱}$ میل فی گھنٹہ

(۷) $۲\sqrt{۲}$ میل فی گھنٹہ سمت عمودی سے °۴۵ کا زاویہ بناتی ہوئی۔

(۸) $۷\sqrt{۵ - ۲\sqrt{۲}}$ میل فی گھنٹہ۔ [و ا (= ۱۴) مشرق کی طرف کھینچو اور و ب (= ۷) جنوب مشرق کی جانب کھینچو۔ متوازی الاضلاع و ا ب ج کی تکمیل کرو تو و ج سمت مطلوبہ ہے]

(۱۰) $\frac{5}{11}$ ۵ ثانیہ (۱۳) ۲۴ منٹ ، ۶ میل

(۱۴) $\frac{1}{12}$ ۲ فٹ فی ثانیہ ب ا سے زاویہ مس‌ا $\frac{3}{4}$ بناتی ہوئی ، ۳ فٹ ، $\frac{23}{25}$ ا ثانیہ کے اختتام پر۔

(۱۶) $۴\sqrt{۲}$ میل فی گھنٹہ جنوب مشرق کی جانب

(۱۷) جانب شرق (۱۸) ۳ ر اور ر

نمبری (۳)

(۱) $\frac{۲۰\pi}{۳}$ نیم قطری فی ثانیہ

(۲) ۸ π نیم قطری فی ثانیہ ، $\frac{۲}{۷}$ ۵۰ فٹ فی ثانیہ

(۳) $\frac{\pi}{۳۰۰}$ فٹ فی ثانیہ ، $\frac{\pi}{۱۸۰۰}$ نیم قطری فی ثانیہ

(۴) ۱ : ۲۰ : ۳۶۰ (۵) $\frac{۱}{۷}$ ۲ میل فی گھنٹہ

(۶) $\frac{\text{ق}' - \text{ف}}{\text{ق}} \times \text{ر}$ (۸) $\frac{۳\text{م}\pi}{\text{ر}}$

(۱۰) $۶۰\sqrt{۳}$ (= ۱۰۳٫۹) میل فی گھنٹہ افق سے ± ۳۰° زاویہ بناتی ہوئی

(۱۱) $\frac{۸۸}{۳}$ نیم قطری فی ثانیہ ، ۳۰ میل فی گھنٹہ

(۱۲) ۲۲ نیم قطری فی ثانیہ ، ۳۰ میل فی گھنٹہ

(۱۳) ۲۰ میل فی گھنٹہ ، ۱۰ میل فی گھنٹہ افق سے ± ۶۰° کا زاویہ بناتی ہوئی ، $۱۰\sqrt{۳}$ میل فی گھنٹہ افق سے ± ۳۰° کا زاویہ بناتی ہوئی

نمبری (۴)

(۲) ۵ میل فی گھنٹہ ایسی سمت میں جو مغرب سے شمال کی جانب زاویہ مس$^{-1}$ $\frac{۴}{۳}$ بناتی ہے

(۳) ۵ فٹ فی ثانیہ اس کی ابتدائی رفتار سے ۱۲۰° کا زاویہ بناتی ہوئی۔

(۴) ۲۰ $\sqrt{۲ - \sqrt{۲}}$ فٹ ثانیہ بجانب شمال شمال مغرب

(۵) ۱۲ فٹ فی ثانیہ اس کی ابتدائی رفتار سے ۱۲۰° کا زاویہ بناتی ہوئی۔

نمبری (۵)

(۱) (۱) ۱۷ فٹ فی ثانیہ، $\frac{۱}{۲}$ ۴۷ فٹ

(۲) صفر، $\frac{۱}{۲}$ ۲۴ فٹ (۳) $-\frac{۵۵}{۱۸}$، $\frac{۷}{۱۱}$ ۱ ثانیہ

(۴) ۳ فٹ فی ثانیہ، ۶ ثانیہ

(۲) ۴۰ فٹ فی ثانیہ، ۴۰۰ فٹ (۳) ۴۰ ثانیہ

(۴) ۲۰ فٹ سیکنڈ اکائیاں (۵) ۱۰ سیکنڈ، ۱۵۰ سنٹی میٹر

(۶) ۵۰ ثانیہ ہیں، ۲۵ میٹر (۷) ۱۸ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۸) ۱۰ فٹ فی ثانیہ، $-\frac{۱}{۵}$ فٹ ثانیہ اکائی

(۹) ۱۹ فٹ فی ثانیہ، ۳ فٹ ثانیہ اکائیاں، $\frac{۱}{۲}$ ۶۰ فٹ

(۱۰) ۵ سیکنڈ، $\frac{۱}{۲}$ ۱۲ فٹ (۱۱) ۱۶ فٹ ثانیہ اکائیاں، ۳۰ فٹ فی ثانیہ

(۱۲) ۲۰ فٹ فی ثانیہ، -۲ فٹ ثانیہ اکائیاں (۱۳) ۳۰ فٹ

(۱۴) $\frac{۱}{۳}$، $\frac{\sqrt{۲} - ۱}{۳}$، $\frac{\sqrt{۳} - \sqrt{۲}}{۳}$ ثانیہ بالترتیب

(۱۵) ۲ ثانیہ میں ۹ سے ۱۶ فٹ پر

(۱۶) ہاں

(۱۷) اس کی نقل مکان $\sqrt{۶۱ + ۴۲\sqrt{۲}}$ فٹ ہے اور مشرق سے شمال کی جانب زاویہ مس$^{-۱}$ $\frac{۲+\sqrt{۲}}{۳}$ بناتی ہے۔

(۱۸) ۱۰ ثانیہ یا ۳۰ ثانیہ (۲۰) $۳۶\frac{۱}{۴}$ میل فی گھنٹہ

(۲۱) ۳۲۳ء۵ فٹ، چوتھے ثانیہ میں، ۲۴ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۲۲) ۳۷۲ء۵ فٹ، $\frac{۳}{۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں

نمبری (۶)

(۱) ۲۵ فٹ، $\frac{۱}{۴}$ ثانیہ اور $۲\frac{۱}{۴}$ ثانیہ

(۲) (۱) $\frac{۱۵}{۳۲}$ ثانیہ میں (۲) $۱\frac{۱}{۴}$ ثانیہ میں

(۳) $۱\frac{۱}{۴}$ ثانیہ اور $۲\frac{۱}{۲}$ ثانیہ میں، ۵۰ فٹ

(۴) (۱) ۱۶۰۰ فٹ (۲) $\frac{۱}{۴}\sqrt{۱۰}$ ثانیہ

(۳) ۶۰ فٹ فی ثانیہ اوپر وار

(۵) ۴۳۲ فٹ (۶) ۴۴ ثانیہ (۷) ۲ ثانیہ یا $۵\frac{۱}{۲}$ ثانیہ

(۸) ۵۴۵ سینٹی میٹر فی ثانیہ، $\frac{۴}{۹}$ ثانیہ (۹) ۲ر۱۰ ثانیہ

(۱۰) ۲۱۸ میٹر، $۶\frac{۲}{۳}$ ثانیہ (۱۱) ۱۸ر۳۲

(۱۲) ۹۰۰ فٹ، $۷\frac{۱}{۲}$ ثانیہ (۱۳) ۱۰۰ فٹ

(۱۴) ۴۰۰ فٹ (۱۵) ۱۴۴ فٹ

(۱۶) ۲۵۶ فٹ فی ثانیہ ، ۱۰۲۴ فٹ

(۱۷) و = ۵ ، ۶۴ فٹ فی ثانیہ (۱۸) ۷۸۴ فٹ

(۱۹) ۱۱۲۰ فٹ فی ثانیہ (۲۰) ۱۵۰ فٹ

نمبری (۷)

(۱) ۲۰۰ فٹ ، ۵ ثانیہ

(۲) ۱۶ $\sqrt{۳}$ فٹ فی ثانیہ ، $\frac{۵}{۸}\sqrt{۳}$ ثانیہ

(۳) °۳۰ (۴) ۱ : ۴

(۵) (۱) – ۸۹$\frac{۳}{۵}$ فٹ ، ۶۰$\frac{۴}{۵}$ فٹ فی ثانیہ

(۲) ۲۱۷$\frac{۳}{۵}$ فٹ ، ۹۲$\frac{۴}{۵}$ فٹ فی ثانیہ

(۶) °۳۰ (۷) جم$^{-۱}$ $\frac{۱}{۴}$ یعنی °۷۵ ′۳۱

نمبری (۸)

(۱) ۸۰۰۴ فٹ (۲) ۱ ثانیہ ، ۱$\frac{۱}{۲}$ ثانیہ

(۳) ۹۶ فٹ فی ثانیہ ، صفر

(۴) پہلا جسم برج کی بلندی کا ایک ربع گر چکیگا

(۵) $\frac{۳}{۸}$ ل

(۶) $\sqrt{ج ل}$ ، $\sqrt{ج ل}$ اور صفر جہاں ل سطح کی بلندی ہے۔

(۷) پہلے جسم کی ابتداء حرکت سے وقت $\frac{۱}{ج}(ر + \frac{۱}{۲} ج و)$ گذرنے کے بعد اور بلندی $\frac{۱}{۲ج}(ر^{۲} - \frac{۱}{۴} ج^{۲} و^{۲})$ پر۔

(۸) ۱۵ ثانیہ (۹) ۹۶ فٹ (۱۰) ۱۹۶ فٹ، ۱۱۲ فٹ فی ثانیہ
(۱۱) حصے ۳۲، ۹۶ اور ۱۶۰ فٹ ہیں، ۳ ثانیہ
(۱۹) $\sqrt{\frac{\text{۲ف}}{\text{ج}}}$ قم عہ قطیہ (۲۰) $\sqrt{\text{ع ف}\left(\text{۳} - \frac{\text{۱}}{\text{ن}}\right)}$
(۲۴) $\frac{۲۲}{۴۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں، $\frac{۴۴}{۴۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں، ۴۰ میل فی گھنٹہ
(۲۵) ۶۰ میل فی گھنٹہ، ۴۴ ثانیہ، ۱۹۳۶ فٹ، ۸ ثانیہ
(۲۸) $\frac{۳۲}{۲۳}$ فٹ سیکنڈ اکائیاں، ۴۰ فٹ فی ثانیہ
(۲۹) $\frac{۱۱}{۴۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں، $\frac{۵۵}{۵۴}$ فٹ ثانیہ اکائیاں، ۲ گھنٹہ ۳ $\frac{۱}{۱۰}$ منٹ۔

نمبری (۹)

(۴) (۱) $\frac{۱}{۲}$ (۲) $\frac{\text{ج}}{۲}$ (۳) $\frac{\text{ج}}{۴۴۸}$ فٹ سیکنڈ اکائیاں
(۵) (۱) ۲۰۰ پونڈل (۲) ۶ $\frac{۱}{۴}$ پونڈ وزن
(۶) ۱۵ پونڈ وزن (۷) ۱۵ $\frac{۲}{۵}$ پونڈ وزن
(۸) ۴۸ فٹ ثانیہ اکائیاں، ۷۲۰ فٹ
(۹) ۱ : ۶۴، ۵ فٹ فی ثانیہ
(۱۰) ۷ $\frac{۱}{۲}$ ثانیہ، ۱۳ $\frac{۱}{۳}$ فٹ فی ثانیہ
(۱۱) ۲ منٹ ۵۶ سیکنڈ (۱۲) ۱۴ سیکنڈ
(۱۴) ۱۸۰ فٹ
(۱۵) ۳۶۳ $\frac{۱}{۳}$ سنٹی میٹر فی ثانیہ، ۱۸۱ $\frac{۲}{۳}$

سنٹی میٹر، ۲۱۸۰۰ سنٹی میٹر

(۱۶) ۴۹ء۰۵ کیلو گرام (۱۷) ۱۴۴ پونڈ

(۱۸) ۱۲ پونڈ

(۱۹) $\frac{۱۱}{۱۶}$ ۷ پونڈ وزن، $\frac{۳}{۸}$ ۲۳۷ پونڈ وزن

(۲۰) وہ مساوی ہیں (۲۱) ۱۱۰ پونڈ وزن

(۲۴) $\frac{۱}{۳}$ ۱۳۳ فٹ فی ثانیہ

نمبری (۱۰)

(۱) $\frac{ج}{۵}$ ، $\frac{۱}{۵}$ ۷ پونڈ وزن

(۲) (۱) ۴ فٹ ثانیہ اکائیاں (۲) $\frac{۷}{۸}$ ۷ پونڈ وزن

(۳) ۲۰ فٹ فی ثانیہ (۴) ۵۰ فٹ

(۳) (۱) $\frac{۲}{۳}$ ۱۰ فٹ فی ثانیہ (۲) $\frac{۱}{۳}$ ۲۱ فٹ (۳) ۶۴۰ فٹ اور ۵۱۲ فٹ بالترتیب۔

(۴) ۱۴۱ء۴ میٹر، ۹۵۴ گرام وزن (۶) بقدر ۲ پونڈ وزن

(۷) $\frac{۲ط}{۳}$ (۸) $\frac{م}{۲}$ (۹) ۱۶ فٹ

(۱۰) (۱) $\frac{ج}{۱۰}$ ، (۲) $\sqrt{۵}$ ثانیہ (۳) $\frac{۱۶}{۵}\sqrt{۵}$ فٹ فی ثانیہ

(۱۱) ۲ ثانیہ

(۱۲) (۱) ۲ فٹ ثانیہ اکائیاں (۲) $\frac{۱۳}{۱۶}$ ۲ پونڈ وزن

(۳) ۶ فٹ فی ثانیہ (۴) ۹ فٹ

(۱۳) $\frac{۳ - ۲\sqrt{۲}}{۷}$ ج ، $\frac{۳}{۴}(۱ + \sqrt{۲})$ ثانیہ

(۱۴) ۴۰ فٹ

(۱۵) ۲۴ پونڈ ۱۰ اونس (۱۶) ۵ اونس

(۱۷) ۱۹ : ۱۳

(۱۸) ۲ ۱/۲ اور ۳ ۱/۲ پونڈ وزن ، ج/۶

(۱۹) ۲۹ فٹ ۹ انچ تقریباً

نمبری (۱۱)

(۱) ۱۱/۲۶ ج ، ۳؍

(۲) ۴۰٫۶ فٹ فی ثانیہ ، ۹۶ فٹ

(۳) ۱؍ (۴) √۲/۲ ثانیہ ، ۸ √۲ فٹ فی ثانیہ

(۵) ۱/۲ √۵ ثانیہ ، ۱۶/۵ √۵ فٹ فی ثانیہ

(۶) ۱۶ √۵ فٹ فی ثانیہ ، ۸۰ فٹ فی ثانیہ

(۸) بڑا جسم باسراع (۲ √۳ − ۳)/۹ ج نیچے کی طرف حرکت کرتا ہے

(۹) ذرے حرکت نہیں کرتے -

(۱۰) ۱/۲ ۲۱۱۷ فٹ (۱۱) ۶۰۵ : ۱۸

(۱۲) (۱) ۵ منٹ ۸ سیکنڈ (۲) ۶۶۷۶ فٹ

(۱۳) ۱ منٹ ۲/۳ ۴۲ سیکنڈ ، ۲/۳ ۲۲۵۸ فٹ

(۱۴) ۲۰/۲۷ ۵ ٹن وزن (۱۵) ۱ میل ۱۴۰۸ گز

(۱۶) ۲/۳ ۱۲۲۴ گز (۱۷) ۶۱/۱۲۵ ۱۱۴ فٹ

(۱۸) ۲۱/۸۰ ۵ ٹن وزن ، تقریباً ۷۷ میں ایک ، ۵۰ میں ایک

نمبری (۱۲)

(۱) صفر (۲) (۱) ۲۰ پونڈ وزن (۲) ۲۰$\frac{۵}{۸}$ پونڈ وزن

(۳) ۱۵۴ پونڈ وزن ، ۷۰ پونڈ وزن

(۴) $\frac{ج}{۸}$ (۵) ۲۰۵۷$\frac{۱}{۷}$ فٹ

(۶) ۲۹۷ گرام وزن ، ۲۷۰ اور ۲۶۴ گرام وزن

(۷) ۳$\frac{۳}{۴}$ اونس وزن ، $\frac{ج}{۴}$ ، ۲$\frac{۱}{۲}$ اونس وزن ، ۳ اونس وزن

(۸) ٫۹۳۹ ٹن وزن (۹) ۳۹٫۴ پونڈ وزن تقریباً

(۱۰) ۷۵۲۱ پونڈ وزن تقریباً

(۱۳) دس سمت شاقولی میں لٹکتے ہیں

(۱۴) ۵ : ۳ (۱۶) ۸۰ فٹ

(۱۸) ۶$\frac{۷}{۸}$ ٹن (۲۱) ۱ : ۲

(۲۲) ۱٫۹ ثانیہ (۲۳) $\frac{۳ و ط}{و + ۴ ط}$

(۲۴) م اوپر وار باسراع $\frac{۳ ج}{۱۳}$ حرکت کرتا ہے اور ن نیچے کی طرف اسراع $\frac{ج}{۱۳}$ سے حرکت کرتا ہے -

(۲۶) ن = $\frac{۴ م مَ}{م + مَ}$ اور اسراع = $\frac{م - مَ}{م + مَ}$ ج

(۲۷) $\frac{۸}{۲۳}$ فٹ سیکنڈ اکائیاں (۲۸) $\frac{۸}{۵۵}$ ج

(۲۹) ۳۲۰ فٹ ، ۲۸ میل فی گھنٹہ

نمبری (۱۳)

(۱) $\frac{۲}{۲۷}$ ۴ فٹ فی ثانیہ (۴) $\frac{۱}{۴}$ ۶ فٹ فی ثانیہ
(۵) $\frac{۶}{۷}$ ۱۷ فٹ فی ثانیہ (۶) ۶٫۸ فٹ
(۷) $\frac{۲۰۹}{۳۲۴}$ ۹ ٹن وزن (۸) ۱۴۳۱ فٹ فی ثانیہ تقریباً

نمبری (۱۴)

(۱) ۱۶۰ (۲) $\frac{۱}{۳}$ ۲۱۳ (۳) ۱۱۹٫۴۶
(۴) ۱۴٫۶۸۵ پونڈ وزن (۵) $\frac{۳}{۵}$ ۲۱ (۶) $\frac{۶۸}{۱۳۵}$ ۶۸
(۷) ۷۳۹۲۰۰۰ فٹ پونڈ، ۷٫۴۶ اسپی طاقت
(۸) ۱۵۲ فٹ پونڈ . (۹) ۲۰۹٫۲ ٹن وزن

امثلہ نمبری (۱۵)

(۱) (۱) ۵۱۲۰ (۲) ۱۲۸۰ (۳) توانائی بالفعل کی صفر اکائیاں
(۲) ۱۵۶۲۵ (۳) ۱۲۵×۱۰^{۹}
(۴) ۶۲۵×۱۰^{۱۰}، ۳۱۲۵×۱۰^{۹} (۵) $\frac{۴۰}{۸۱}$ ۳۱۶۰ فٹ پونڈ
(۶) ۱ : ۲، ۱۵ : ۱، ۳۰۰ اور ۶۰۰ پونڈل، ۶۰۰ اور
۲۰ فٹ

امثلہ نمبری (۱۶)

(۳) صدمے کی ۸۹۶۰۰ اکائیاں، ۴ فٹ

(۴) $\frac{۵}{۷}$ فٹ ، $\frac{۱}{۱۴}\sqrt{۱۰}$ (= ء۲۲۶) ثانیہ ، $\frac{۳}{۴}$
(۵) ۷ء۷۹۷ سینٹی میٹر فی ثانیہ ، ۴۰۷۷۵ گرام وزن تقریباً
(۶) ۱۰۴ ہنڈرڈ ویٹ وزن
(۷) جسم ۲۴ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے حرکت کرتے ہیں
(۸) $\frac{۸}{۳}\sqrt{۶}$ فٹ فی ثانیہ ، $\frac{۴}{۳}\sqrt{۳۰}$ فٹ فی ثانیہ
(۱۱) $\frac{ب}{ج}$ جہاں ب مشترکہ رفتار ہے
(۱۲) $\frac{م_۱}{م_۱ + م}$ (۱۳) ۷ فٹ ، $\frac{۱}{۴}$ ۲۶ ثانیہ
(۱۴) رفتاریں آخر کار مساوی ہو جاتی ہیں
(۱۶) ۱ : ۱ء۱۶۹ (۱۷) ۲۰ $\sqrt{۲}$ فٹ فی ثانیہ ، ۵۶۰۰۰۰ فٹ پونڈ
(۱۸) $\frac{۳۱}{۵۴}$ ۱۱ ٹن وزن ، ۲۸ ، ۲۳۳ ، $\frac{۱}{۳}$ ۳۳۳ فٹ پونڈ
(۱۹) $\frac{۶۳}{۱۳۷}$ ۱۱ ٹن (۲۱) ۳۵۲۰ فٹ پونڈ
(۲۲) $\frac{۱۰}{۳۹}$ ۱۰ (۲۳) $\frac{۸۸ رن}{ع}$
(۲۴) ۳ پونڈ وزن ، $\frac{۴}{۹}$ ۲۴ پونڈ وزن
(۲۶) $\frac{۱}{۳}$ ۳۳ اکائیاں ، $\frac{۱}{۲۴}$ ۱ پونڈ وزن ، $\frac{۵}{۵۲۸}$ اسپی طاقت
(۲۷) ۶۹ء۱۲ پونڈ وزن

امثلہ نمبری (۱۷)

(۱) (۱) ۱۶ فٹ ، ۲ ثانیہ ، ۱۱۰ء۹ فٹ
(۲) ۷۵ فٹ ، ۳۳ء۴ ثانیہ ، ۱۷۳ء۲ فٹ
(۳) ۴ء۱۳۴ فٹ ، ۷۹۵ء۵ ثانیہ ، ۱۴۴ فٹ
(۴) ۲۲۵ فٹ ، $\frac{۱}{۲}$ ۷ ثانیہ ، ۱۲۰۰ فٹ

(۲) ۷۲ فٹ ، ۱۱۲ ۱/۲ فٹ ، ۳۱۲ ۱/۲ فٹ

(۳) ۲۶۰۹٫۵۸ میٹر ، ۶۵۲٫۳۹ میٹر

(۴) ۴٫۰۴ ثانیہ ، ۲۰ میٹر

(۶) ۱۳۳۳ ۱/۳ فٹ فی ثانیہ (۷) ۲ ب ، ۲ √ب ج

(۸) ۵۰٫۱ افق سے بزاویہ مس⁻¹ ۶/۱۱ (= ۲۸° ۳۶′)

(۹) (۱) ۱۶ √۱۷ (= ۶۵٫۹۷) فٹ فی ثانیہ افق سے بزاویہ مس⁻¹ ۴ (= ۷۵° ۵۸′)

(۲) ۱۶ √۳۷ (= ۹۷٫۳۲) فٹ فی ثانیہ افق سے بزاویہ مس⁻¹ ۶ (= ۸۰° ۳۲′)

(۱۰) ۵۵۴۳ گز تقریباً (۱۱) ۱۳ ثانیہ ، ۳۳۲۸ فٹ

(۱۳) ۴۰ √۶ (= ۹۷٫۹۸) فٹ فی ثانیہ افق سے بزاویہ ۴۵°

(۱۴) ۸۰ √۱۱۰ (= ۸۳۹٫۰۴) فٹ فی ثانیہ ،
۴۸ √۱۱۰ (= ۵۰۳٫۴) فٹ فی ثانیہ

(۱۵) ۱ : √۳ ، ۱ : ۱

(۱۷) (۱) ۴۵° (۲) ۳۰° (۱۸) ۱۵° یا ۷۵°

امثلہ نمبری (۱۸)

(۱) ۲۵۰۰ گز ، ۲۱٫۷ ثانیہ

(۲) ۲√۲/۴۸ (√۳ - ۱) کے فاصلے پر ، ۲√۲/۴۸

(۳) ۶۲٫۵ فٹ تقریباً ، ۲/۳ (۳ √۲ - √۶) یعنی
۱٫۲ ثانیہ تقریباً ، ۸۵ ۱/۴ فٹ

(۴) (۱) ۱۶۰۰۰ فٹ (۲) ۱۱۲۰۰۰
(۵) ۱۱۷۱۶ فٹ اور ۲۷ ثانیہ تقریباً ،
۱۰۷۱۸ فٹ اور ۲۵٫۹ ثانیہ تقریباً ،
۱۹۰۴۸ فٹ اور ۴٫۴۳ ثانیہ تقریباً ،
۴۴۴۴۴ $\frac{۴}{۹}$ فٹ اور ۳۰ ثانیہ تقریباً۔
(۶) ۲۹۲۹ گز تقریباً ، ۱۰۷۱ گز تقریباً
(۸) ۸۴٫۹۵ میٹر ، ۴٫۱۴۴ میٹر

امثلہ نمبری (۱۹)

(۱) ۱۹ میل نصف قطر کا ایک دائرہ
(۲) افق سے بزاویہ $مس^{-۱}\frac{۱}{۱۰}$ (یعنی ۵° ۴۳′)
(۳) ۳ $\frac{۱}{۴}$ فٹ ، ۱۸۵٫۹ فٹ (۴) ۱۲۱ فٹ تقریباً
(۵) $\frac{۱}{۲۰}$ ثانیہ میں اور ایسے مقام پر جس کے افقی اور عمودی فاصلے پہلی توپ سے ۳۶۳٫۷۴ اور ۴۶٫۲۷ فٹ ہیں
(۸) ۳۰° (۱۴) ۲ $\sqrt{\frac{۲ب}{ج}}$ × جم عہ

(۱۵) بندوق کی سمت غبارہ کی طرف ہونی چاہیئے۔ گولی جسم کو اس وقت لگیگی جب جسم ۱۶ فٹ گرچکیگا۔
(۱۸) ۲ $\frac{۱}{۴}$ پونڈ (۱۹) ۵۱٫۶ فٹ ، ۳۲٫۲۹ فٹ
(۲۰) ۲۷۲ $\frac{۱}{۴}$ فٹ ، ۳۲۴ فٹ ، ۲۲۵ فٹ

(۲۱) $\frac{ر}{ج}$ (جب عہ ± جم عہ) ثانیہ جہاں ر رفتار رمی اور عہ زاویۂ رمی ہے۔

(۲۳) ۸۰ فٹ فی ثانیہ

امثلہ نمبری (۲۰)

(۱) ۲۹٫۷ فٹ

(۶) ۲ $\sqrt{۱۳}$ (= ۷٫۲) فٹ فی ثانیہ بزاویہ

مس$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ (= ۱۶° ۶′) سطح سے۔

(۸) (۱) ۴ $\sqrt{۴۳}$ (= ۲۶٫۲) فٹ فی ثانیہ بزاویہ

مس$^{-۱}$ $\frac{۳\sqrt{۳}}{۴}$ (= ۵۲° ۲۵′) سطح سے

(۲) ۲۰ $\sqrt{۲}$ (= ۲۸٫۳) فٹ فی ثانیہ بزاویہ

مس$^{-۱}$ $\frac{۳}{۴}$ (= ۳۶° ۵۲′) سطح سے

(۳) ۴ $\sqrt{۵۷}$ (= ۳۰٫۲) فٹ فی ثانیہ بزاویہ

مس$^{-۱}$ $\frac{\sqrt{۳}}{۴}$ (= ۲۳° ۲۵′) سطح سے

امثلہ نمبری (۲۱)

(۱) $۴\frac{۵}{۱۴}$ اور $۴\frac{۶}{۷}$ فٹ فی ثانیہ

(۲) $۲\frac{۲}{۳}$ اور $۵\frac{۱۱}{۱۲}$ فٹ فی ثانیہ

(۳) پہلا ساکن رہتا ہے اور دوسرا ۶ فٹ فی ثانیہ کی رفتار سے واپس ہوتا ہے۔ (۸) $\frac{۱}{۲}$

(۹) (۱) کمیتوں کی نسبت ۳ : ۱ ہے (۲) رفتاروں کی نسبت ۱ : ۲ ہے۔

(۱۱) ۵٫۶۶ اور ۲٫۵ ثانیہ

(۱۷) $۵\sqrt{۵}$ ب (= ب × ۱۱٫۱۸۰) بزاویہ $مس^{-۱}\frac{۱}{۲}$ (= ۲۶° ۳۴') اور $\sqrt{۲۰۵}$ ب (= ب × ۱۴٫۳۱۸) بزاویہ $مس^{-۱}\frac{۳}{۱۴}$ (= ۱۲° ۶') خط مرکزین سے

امثلہ نمبری (۲۲)

(۳) ۶۰ فٹ ، ۴۶۴ء۳ ثانیہ

(۴) ۸ ثانیہ ، ۴۳۴ء۴ فٹ

(۶) برج کے پایہ سے فاصلہ ی پر

(۹) ایک ایسے نقطے پر جس کا فاصلہ نقطۂ ابتداءِ حرکت سے محیط کا اٹھارھواں حصہ ہے -

(۱۶) ۴ ل ط جب^2 عہ جم عہ (۱۷) ۲ $\sqrt{۳}$ ن ل (۱+ل) فٹ

(۱۹) سطح عمودی پر ب ن عمود کھینچو اور ج تک خارج کرو حتیٰ کہ ب ن = ل × ج ن - سمت مطلوبہ اج ہو گی -

امثلہ نمبری (۲۳)

(۱) ۶۰ پونڈل (۲) ۶ء۲۸

(۳) ۳ء۸۴ (۵) ۲۴ فٹ فی ثانیہ

(۶) ۴ء۱۳ تقریباً (۷) $\frac{۱}{۱۲۰}$ ا ٹن وزن

(۸) ۲۴ء۲ ٹن وزن

امثلہ نمبری (۲۴)

(۱) تقریباً ۶۶ء۵ پونڈ وزن ، تقریباً ۲۴ء۸ فٹ فی ثانیہ

(۴) ۱۲ فٹ فی ثانیہ (۶) ۹ء۴ انچ

(۷) ۳٫۰۲ انچ (۸) ۶٫۱۸ انچ

(۱۰) $۶۰\sqrt{\frac{ج}{\pi^۲}} = ۱۰۸$ تقریباً (۱۳) ۳۷۱ : ۳۶۹ : ۳۷۰

(۱۶) م (ج − $۴\pi^۲$ن^{۲}ب) پونڈل ، $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{ج}{ب}}$

(۱۸) $\sqrt{۲\,ج\,ف}$ (۱۹) م ر^۲ : مَ رَ^{۲}

(۲۰) $\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{م\,ج}{مَ(ط-ل)}}$ (۲۱) اتنا کم کرنا چاہئے کہ اسکی پہلی مقدار کا $\frac{۱}{۴}$ باقی رہے۔

(۲۲) ۱ : $\sqrt{۲}$ ، $\frac{\pi}{۲}$ ، $۲\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ ثانیہ

(۲۳) $\sqrt{\frac{لہ}{م} \times \frac{ن(ن-ا)}{ا}}$

(۲۵) (۱) اندر کی ریل پر تقریباً ٫۵۷ ٹن وزن
(۲) باہر کی ریل پر تقریباً ٫۸ ٹن وزن۔

امثلہ نمبری (۲۵)

(۱) (۱) ۲۰٫۸ فٹ فی ثانیہ ، ۲۲٫۶ پونڈ وزن
(۲) ۱۵٫۵ فٹ فی ثانیہ ، ۷٫۶ پونڈ وزن
(۳) ۲۱٫۹ فٹ فی ثانیہ ، ۳۰ پونڈ وزن

(۳) ۸ $\sqrt{۳}$ فٹ فی ثانیہ ، ۳ ص ج

(۴) (۱) ۲۴ فٹ فی ثانیہ (۲) ۱۲ $\sqrt{۲}$ فٹ فی ثانیہ

(۳) ۸ $\sqrt{۳}$ فٹ فی ثانیہ، ۱۲ فٹ فی ثانیہ

(۵) ذرے کے وزن کا چھ گنا ، ۴۰ فٹ فی ثانیہ

(۶) ۴۴۸ فٹ فی ثانیہ ، ۹ ہنڈرڈ ویٹ کا وزن ، $۴\frac{۱}{۲}$ ہنڈرڈ ویٹ کا وزن

(۹) دائرے کے نصف قطر کا $\frac{۱۶}{۲۷}$

(۱۰) $\frac{ق}{۸۱}$ اور $\frac{۱۶ ق}{۸۱}$ جہاں ق دائرے کا قطر ہے۔

(۱۱) لچک کی قدر = $\frac{۱}{۲}$

(۱۳) ۷ $\sqrt{۳}$ ص پونڈ وزن ، ۵ $\sqrt{۳}$ م پونڈ وزن

(۱۴) $\frac{۱}{۸}\sqrt{ج\ ر\ (۱۸۷ + ۱۱\sqrt{۲})}$

(۱۸) ۱۲ فٹ فی ثانیہ ، ۹ انچ

(۲۰) ۸۰ سینٹی میٹر تقریباً

امثلہ نمبری (۲۶)

(۱) (۱) $\frac{۱}{۲}\pi\sqrt{۲}$ ثانیہ (۲) $\frac{\pi}{۶}$ ثانیہ (۳) ایک ثانیہ

(۲) ۲ $\sqrt{۲}$ ، $۱\frac{۱}{۲}$ ، π فٹ فی ثانیہ

(۳) (۱) π (۲) ۳۲ π (۳) ۲ فٹ فی ثانیہ

(۴) ۳٫۴۶ فٹ فی ثانیہ (۵) π ثانیہ ، ۲۰ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۷) ۲۵ سینٹی میٹر تقریباً (۸) ۴ انچ ، ۱ء۱۱ ثانیہ

(۹) $\frac{\pi}{۸}\sqrt{۲}$ ثانیہ = ء۵۶ ثانیہ

(۱۰) $\pi\sqrt{\frac{ا م}{ل}}$ جہاں ا رسی کا اصلی طول ہے اور ل اس کی لچک کا مقیاس ہے اور م ذرے کی کمیت ہے۔

امثلہ نمبری (۲۷)

(۱) ۲۰ء۴ فٹ (۳) ۳۲ء۲۴۹

(۴) (۱) ۹ء۷۸ انچ (۲) ۲ء۴۴۵ انچ (۳) ۱۵۶ء۴۸ انچ

(۵) ۳۳۰ (۷) ۳۲ء۱۶ (۸) ۷۷۷۵۶ تقریباً

امثلہ نمبری (۲۸)

(۱) ۳۲ء۱۸۵ (۲) ۱ : ۱ء۰۰۴۶

(۳) تقریباً ۲۱۵ (۴) اسے بقدر ء۰۰۸ انچ کم کرنا چاہیے

(۵) اسے بقدر ء۰۰۴۵ انچ لمبا کرنا چاہیے

(۶) ۴۳۲ (۷) ۵۵ (۸) ۹۸۱

(۹) یہہ بقدر ۱۰ ثانیہ پیچھے ہو جائے گا۔

(۱۰) ۱۶۳۰ گز ، ۵ ثانیہ

(۱۱) ۱ : ۱ء۰۰۰۵ ، ۱ء۱۸۵۲ میل

(۱۲) ۱۰ء۸ ثانیہ ، ء۰۱ انچ تقریباً

(۲۰) π ثانیہ ، $\frac{ج}{۶۴}$ ، ۳ انچ فی ثانیہ

امثلہ نمبر (۲۹)

(۱) ۸۸ فٹ فی ثانیہ ، $\frac{۲۲}{۱۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۲) ۱۳۲۰ فٹ فی ثانیہ ، ۳۳۰ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۳) ۸۸۰ گز ، $\frac{۱۱}{۱۵}$ فٹ ثانیہ اکائیاں

(۵) ۵۶$\frac{۱}{۷}$ فٹ (۶) ۸۸ گز

(۸) (۱) ۸ (۲) $\frac{۱۱}{۱۵}$ (۳) ۳۸۴۰۰۰

(۱۰) ۱۲۶$\frac{۱۸}{۱۴}$ (۱۱) ۱۱ ثانیہ

امثلہ نمبری (۳۰)

(۱) ۴۰$\frac{۴}{۹}$ پونڈل (۲) ایک پونڈل ، ۱۰ فٹ پونڈل

(۳) $\frac{۱}{۴}$ ثانیہ (۵) ۸۸۰۰ گز ، ۳۰۰ ثانیہ ، ۵۴$\frac{۶}{۱۱}$ ٹن

(۶) ۳۴۲$\frac{۶}{۷}$ گز (۷) ۴۰۰ فٹ ، ۹۰ پونڈ

(۸) ۱۱ پونڈ (۱۰) ۱ : ۹ ، ۳ : ۱ ، ۲ : ۱۵

(۱۲) $\frac{۴}{۷} \times ۱۲۰^{۴}$ ، ۱۱۵۲۰۰

(۱۳) ۱$\frac{۹}{۱۶}$ فٹ ، $\frac{۵}{۸}$ ثانیہ ، ۸ پونڈ

(۱۴) ۸۰۰ فٹ ، ۵ ثانیہ ، ۲ پونڈ

(۱۵) ۱۴۱۱۲ گز ، ۲۱ ثانیہ ، $\frac{۱}{۱۲۶}$ پونڈ

(۱۶) ۱۸ء۲۱ میٹر ، ۵ء۴۵ ثانیہ ، ۴ء۳۰ گرام

(۱۷) ایک میل ، ۸ منٹ ، ۹۹$\frac{۵۷}{۷۷}$ ٹن

(۱۸) ۶۰۰ فٹ ، ۷$\frac{۱}{۲}$ ثانیہ ، ۱۲۰۰ پونڈ

(۱۹) ۲ $\frac{۲۴۱}{۳۵۲}$ میل ، ۱۵ $\frac{۳}{۴}$ منٹ ، ۸۸ ٹن

(۲۰) ج پونڈ

متفرق سوالات

(۱) ۱۴۴ فٹ (۲) ۵۷۶ فٹ ، ۶ ثانیہ

(۳) ۱ $\frac{۱}{۳}$ انچ (۴) ۷ $\frac{۱}{۹}$ اونس وزن ، ۵ $\frac{۵}{۹}$ اونس وزن

(۷) ۷۷ ثانیہ ، ۲۱۷ : ۱۶۲

(۱۴) $\frac{ف}{۳۰ ن}$

(۱۵) جنوب مغرب (۱۸) $\frac{۳۰}{۳۱}$ $\sqrt{\frac{ر ج}{ا}}$

(۲۰) سمت عمودی کے دونوں طرف °۶۰

(۲۷) جس طرف ذرہ ہے اس طرف باسراع ج مس عہ ،
ذرے کے وزن کا قط عہ گنا ۔

(۲۹) $\frac{۱۱}{۱۷}$ ۵ پونڈ وزن ، $\frac{ج}{۱۷}$

(۳۳) $\frac{۲ن + م}{۶ن + ۵م}$ ج

(۳۹) $ج\left(\frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ق} - \frac{۴}{ع}\right) \div \left(\frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ق} + \frac{۴}{ع}\right)$ ، $۴ج \div \left(\frac{۱}{ط} + \frac{۱}{ق} + \frac{۴}{ع}\right)$

(۴۳) آدمی کے وزن کا $\frac{۱۲}{۷}$ گنا (۴۷) $\frac{۵}{۴}\sqrt{۲}$ ثانیہ

(۵۴) $\frac{۵ ج}{۱۷}$ ، ۲ $\frac{۲}{۱۷}$ پونڈ وزن ، ۱۰ $\frac{۱۰}{۱۷}$ پونڈ وزن

(۵۹) $\sqrt{\frac{۷ ا ج}{۲}}$ ، ایک ایسے نقطے پر جہاں نصف قطر افق سے

۳۰° کا زاویہ بناتا ہے۔

(۶۴) م ج جم عہ (ن + نَ − نَ مس عہ) / (ن + نَ + م جب² عہ)

(۶۹) قدر فک، (م جم عہ جب عہ) / (ن + م جم² عہ) سے بڑی ہونی چاہئے۔

(۷۱) ۱۶۵۰ فٹ پونڈ، ۳۷ء۵ فٹ پونڈ، ۲۳۸۷ء۵ فٹ پونڈ

(۷۲) ۲ء۴۵ اور ۳ ۱/۳ فٹ پونڈ، ۳ء۸۹ اور ۱۰ فٹ پونڈ، ۳ء۹ فٹ فی ثانیہ

(۷۷) ۳ ۳/۱۴ پونڈ وزن، ۲۷ ۳/۱۱ میل فی گھنٹہ

تمت

